ALGEBRA 1B, Lista 12

R jest dziedziną i K jest ciałem.

1. Znaleźć właściwy ideał pierwszy $\mathbb{Z}[X]$, który nie jest maksymalny.

2. Niech $a \in R$. Udowodnić, że a jest nierozkładalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $b \in R$, jeśli $b|a$, to $b \sim a$ lub $b \in R^*$.

3. Niech $d \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ i $d^2 \in \mathbb{Z}$. Rozważmy funkcję:
$$v : \mathbb{Z}[d] \to \mathbb{Z}, \quad v(n + md) = n^2 - m^2d^2.$$
Udowodnić, że dla każdych $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[d]$:
   (a) $v(\alpha\beta) = v(\alpha)v(\beta)$.
   (b) $\alpha \in \mathbb{Z}[d]^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v(\alpha) = \pm 1$.
   (c) Jeśli $v(\alpha)$ jest liczbą pierwszą, to α jest nierozkładalny.

4. Udowodnić, że 3 jest rozkładalny i że 5 jest nierozkładalny w $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.

5. Zbadać, czy dana liczba jest elementem rozkładalnym pierścienia R.
   (a) $7 + \sqrt{-5}$, $2 + 3\sqrt{-5}$, $5 + 4\sqrt{-5}$; $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$,
   (b) $-1 + 7i$, 5, 23, $1 + 6i$; $R = \mathbb{Z}[i]$.

6. Wyznaczyć z dokładnością do stowarzyszenia wszytkie elementy nierozkładalne w $K[[X]]$.

7. Udowodnić, że pierścień $K[X^2, X^3]$ nie jest UFD.

8. Niech R będzie UFD i $a, b \in R$. Udowodnić, że ideał $(a) \cap (b)$ jest główny.

9. Niech S będzie podzbiorem multyplikatywnym R. Udowodnić, że:
   (a) Dla $I \trianglelefteq R_S$ mamy $(I \cap R)R_S = I$.
   (b) Istnieje monomorfizm $f : R_S \to R_0$.
   (c) Jeśli R jest PID, to R_S jest PID.
   (d) Jeśli R jest noetherowski, to R_S jest noetherowski.
   (e) Jeśli $I \trianglelefteq R$ jest maksymalnym elementem w rodzinie ideałów rozłącznych z S, to I jest ideałem pierwszym.

10. Dla każdej liczby pierwszej p, utożsamiamy $\mathbb{Z}_{(p)}$ z podpierścieniem $\mathbb{Q}$. Udowodnić, że:
$$\bigcap_{p\text{-pierwsza}} \mathbb{Z}_{(p)} = \mathbb{Z}.$$