ALGEBRA 1B, Lista 13

R, S są pierścieniami przemiennymi z 1.

1. Niech $p > 2$ będzie liczbą pierwszą. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
   (a) p jest elementem rozkładalnym $\mathbb{Z}[i]$,
   (b) p jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych,
   (c) $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$.
2. Wykazać, że spośród liczb pierwszych jest nieskończenie wiele:
   (a) elementów nierozkładalnych $\mathbb{Z}[i]$,
   (b) elementów rozkładalnych $\mathbb{Z}[i]$.
3. Udowodnić, że pierścień $\mathbb{Z}[2X, 2X^2, 2X^3, \ldots]$ nie jest noetherowski.
4. Znaleźć NWD i NWW dla:
   (a) $X^4 - X,\ X^6 - X$ w $\mathbb{C}[X]$,
   (b) $X^4 - X,\ X^6 - X$ w $\mathbb{C}[\![X]\!]$,
   (c) $4 - 2i,\ 13 + i$ w $\mathbb{Z}[i]$,
   (d) $13,\ 12 + 5i$ w $\mathbb{Z}[i]$,
5. Dla $I, I', J \trianglelefteq R$ udowodnić, że $I(J + J') = IJ + IJ'$.
6. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
   (a) Istnieją R_1, R_2 niezerowe pierścienie z 1 takie, że $R \cong R_1 \times R_2$.
   (b) Istnieją $u_1, u_2 \in R \setminus \{0\}$ takie, że $u_1 + u_2 = 1,\ u_1^2 = u_1,\ u_2^2 = u_2$.
7. Udowodnić, że $\mathbb{Q}[X, Y]/(XY) \ncong \mathbb{Q}[X, Y]/(X) \times \mathbb{Q}[X, Y]/(Y)$.
8. Udowodnić, że $(R \times S)^* \cong R^* \times S^*$.
9. Dla $n, m \in \mathbb{N}$ względnie pierwszych udowodnić, że $\mathbb{Z}_{mn}^* \cong \mathbb{Z}_m^* \times \mathbb{Z}_n^*$.
10. Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, gdzie $\alpha_i \in \mathbb{N}$ i $p_1, \ldots, p_k$ są liczbami pierwszymi, które są parami różne. Udowodnić, że:
    (a) Dla $\alpha \in \mathbb{N}$ i p pierwszej mamy $|\mathbb{Z}_{p^\alpha}^*| = p^\alpha - p^{\alpha-1}$,
    (b) $|\mathbb{Z}_n^*| = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}) \cdot \ldots \cdot (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1})$.