ALGEBRA 1B, Lista 14

R jest pierścieniem przemiennym z 1, K jest ciałem.

1. Niech $f, g \in K[X]$ gdzie $f = \sum a_i X^i$. Definiujemy $f \circ g$ jako $\sum a_i g^i$. Udowodnić, że:
   (a) Funkcja $\Psi_g : K[X] \to K[X]$, $\Psi_g(h) = h \circ g$ jest homomorfizmem.
   (b) Zbiór wielomianów $\{f \in K[X] \mid \deg(f) = 1\}$ jest zamknięty na działanie $\circ$ i wraz tym działaniem jest grupą, która jest izomorficzna z $K^* \ltimes (K, +)$, gdzie K^* działa na $(K, +)$ poprzez mnożenie.
   (c) Jeśli $\deg(g) = 1$, to f jest nierozkładalny wtedy i tylko wtedy, gdy $f \circ g$ jest nierozkładalny.
2. Udowodnić, że $X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ jest nierozkładalny, gdzie p jest liczbą pierwszą.
3. Niech $n \in \mathbb{N}$ i przyjmijmy $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_0$. Udowodnić, że $\mathrm{char}(R) = n$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje monomorfizm $\phi : \mathbb{Z}_n \to R$ taki, że $\phi(1) = 1$.
4. Napisać tabelkę dodawania i mnożenia w $\mathbb{F}_4$.
5. Znaleźć $f \in \mathbb{F}_2[X]$ taki, że:
   (a) $\mathbb{F}_2[X]/(f) \cong \mathbb{F}_4$
   (b) $\mathbb{F}_2[X]/(f) \cong \mathbb{F}_8$