ALGEBRA 1B, Lista 2

1. Niech G będzie grupą, $g \in G$ i $k, l \in \mathbb{Z}$. Udowodnić, że $(g^k)^l = g^{kl}$.

2. Niech G i H będą grupami, $g \in G$, $m \in \mathbb{Z}$ i $f : G \to H$ będzie homomorfizmem. Udowodnić, że $f(g^m) = f(g)^m$.

3. Udowodnić, że złożenie homomorfizmów jest homomorfizmem i że funkcja odwrotna do izomorfizmu jest izomorfizmem.

4. Udowodnić, że jeśli w grupie G dla każdego $g \in G$ mamy $g^2 = 1$, to G jest przemienna.

5. Niech A będzie grupą przemienną i $n \in \mathbb{Z}$. Udowodnić, że funkcja
$$f : A \to A, \quad f(a) = na$$
jest homomorfizmem.

6. Podać przykład grupy G, dla której funkcja
$$f : G \to G, \quad f(g) = g^2$$
nie jest homomorfizmem.

7. Udowodnić, że każda grupa rzędu 3 jest izomorficzna z $\mathbb{Z}_3$.

8. Udowodnić, że $S_2 \cong \mathbb{Z}_2$, $S_3 \cong D_3$ i że $S_4 \ncong D_4$.

9. Niech $n \geqslant 1$. Udowodnić, że:
   (a) Obcięcie $\cdot_n$ jest działaniem na $\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą pierwszą.
   (b) Jeśli n jest liczbą pierwszą, to $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \cdot_n)$ jest grupą przemienną.

10. Niech
$$\mathbb{Z}_n^* := \{a \in \mathbb{Z}_n \mid (\exists b \in \mathbb{Z}_n)(a \cdot_n b = 1)\}.$$
Udowodnić, że $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot_n)$ jest grupą izomorficzną z $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$.