ALGEBRA 1B, Lista 3

1. Niech $g \in G$. Przyjmijmy, że $\min \emptyset = \infty$. Udowodnić, że:
$$\text{rząd}(g) = \min\{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid g^n = 1\}.$$
2. Udowodnić, że jeśli G jest cykliczna, to istnieje $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ takie, że $G \cong \mathbb{Z}$ lub $G \cong \mathbb{Z}_n$.
3. Załóżmy, że g jest jedynym elementem rzędu 2 w grupie G. Udowodnić, że dla każdego $h \in G$ mamy $gh = hg$.
4. Korzystając z 3. udowodnić istnienie ciągłej bijekcji
$$f : (0, \infty) \to (0, \infty)$$
takiej, że $f \circ f = \text{id}$ oraz $f \neq \text{id}, f \neq \frac{1}{x}$.
5. Udowodnić, że jeśli $f : G \to H$ jest monomorfizmem, to dla każdego $g \in G$ mamy
$$\text{rząd}(g) = \text{rząd}(f(g)).$$
6. Pokazać, że nie istnieje monomorfizm $(\mathbb{Z}_3, +_3) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.
7. Udowodnić, że $D_6 \not\cong A_4$.
8. Dla każdego $n \geqslant 1$ znaleźć monomorfizm $(\mathbb{Z}_n, +_n) \to (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.
9. Dla $n \geqslant 1$ znaleźć monomorfizm $f : S_n \to \text{GL}_n(\mathbb{Q})$.
10. Udowodnić, że $(\mathbb{Q}, +)$ nie jest skończenie generowana.
11. Weźmy $\sigma \in S_7$ taką, że
$$\sigma_1 = 3,\ \sigma_2 = 5,\ \sigma_3 = 7,\ \sigma_4 = 2,\ \sigma_5 = 6,\ \sigma_6 = 4,\ \sigma_7 = 1.$$
Rozłożyć σ na iloczyn cykli rozłącznych i policzyć $\text{sgn}(\sigma)$.
12. Udowodnić, że jeśli $\sigma, \tau \in S_n$ są rozłączne, to $\sigma\tau = \tau\sigma$.
13. Sformułować i udowodnić twierdzenie o jednoznaczności rozkładu permutacji na iloczyn cykli rozłącznych.