ALGEBRA 1B, Lista 4

Załóżmy, że G jest grupą.

1. Niech $g \in G$. Przyjmijmy, że $\min \emptyset = \infty$. Udowodnić, że:
$$\text{rząd}(g) = \min\{n \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \mid g^n = 1\}.$$
2. Udowodnić, że jeśli $f : G \to H$ jest monomorfizmem, to dla każdego $g \in G$ mamy
$$\text{rząd}(g) = \text{rząd}(f(g)).$$
3. Dla $n \geqslant 1$ znaleźć monomorfizm $f : S_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$.
4. Udowodnić, że $(\mathbb{Q}, +)$ nie jest skończenie generowana.
5. Udowodnić, że jeśli $\sigma, \tau \in S_n$ są rozłączne, to $\sigma\tau = \tau\sigma$.
6. Załóżmy, że istnieje $g \in G$ taki, że $\text{rząd}(g) \neq 1, 2$. Udowodnić, że $\mathrm{Aut}(G) \neq \{\mathrm{id}_G\}$.
7. Udowodnić, że jeśli $|G| \leqslant 5$, to G jest przemienna.
8. Wyznaczyć centrum S_3 i centrum D_4.
9. Niech G będzie nieskończona i $H \leqslant G$. Udowodnić, że $|G/H| = |H \backslash G|$.
10. Niech $n \geqslant 2$. Udowodnić, że $T_n(\mathbb{R})$ nie jest dzielnikiem normalnym w $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
11. Udowodnić, że każda podgrupa indeksu 2 jest dzielnikiem normalnym.
12. Znaleźć przykład podgrupy indeksu 3, która nie jest dzielnikiem normalnym.