ALGEBRA 1B, Lista 5

Zakładamy, że G, H, N są grupami, φ jest działaniem H na N poprzez automorfizmy i p jest liczbą pierwszą.

1. Udowodnić, że $H \ltimes_{\varphi} N$ jest przemienna wtedy i tylko wtedy, gdy H i N są przemienne oraz działanie φ jest trywialne.
2. Niech H będzie p-podgrupą G, która jest dzielnikiem normalnym. Udowodnić, że H jest zawarta w każdej p-podgrupie Sylowa G.
3. Udowodnić, że jeśli H jest p-podgrupą Sylowa w G, to H jest dzielnikiem normalnym wtedy i tylko wtedy, gdy H jest jedyną p-podgrupą Sylowa.
4. Udowodnić, że jeśli $|G| = 6$, to $G \cong \mathbb{Z}_6$ lub $G \cong S_3$.
5. Udowodnić, że dla $n \geqslant 2$ mamy $S_n \cong \mathbb{Z}_2 \ltimes A_n$.
6. Niech $q > p$ będzie liczbą pierwszą i $|G| = pq$. Udowodnić, że:
   (a) Jeśli $p \nmid q - 1$, to $G \cong \mathbb{Z}_{pq}$.
   (b) Jeśli $p | q - 1$, to istnieje φ – nietrywialne działanie $\mathbb{Z}_p$ na $\mathbb{Z}_q$.
   (c) Jeśli G jest nieprzemienna, to $G \cong \mathbb{Z}_p \ltimes_{\varphi} \mathbb{Z}_q$ dla pewnego φ jak w (b).
7. Niech $f : G \to H$ będzie epimorfizmem. Załóżmy, że istnieje *cięcie* f, tzn. homomorfizm $\phi : H \to G$ taki, że $f \circ \phi = \mathrm{id}_H$. Udowodnić, że $G \cong H \ltimes \ker(f)$.
8. Udowodnić, że A_4 nie zawiera podgrupy rzędu 6.
9. Udowodnić, że każda grupa rzędu 200 zawiera normalną podgrupę rzędu 25.
10. Znaleźć wszystkie p-podgrupy Sylowa w S_p.
11. Załóżmy, że $|G| = p^2$. Udowodnić, że $G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ lub $G \cong \mathbb{Z}_{p^2}$.