ALGEBRA 1B, Lista 6

Niech A będzie grupą przemienną.

1. Niech G będzie grupą rzędu 8, w której istnieje 6 elementów rzędu 4. Udowodnić, że $G \cong Q_8$.

2. Załóżmy, że $|G| = 8$. Udowodnić, że $G \cong \mathbb{Z}_8$ lub $G \cong \mathbb{Z}_4 \times \mathbb{Z}_2$ lub $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ lub $G \cong D_4$ lub $G \cong Q_8$.

3. Wypisać (z dokładnością do izomorfizmu) wszystkie grupy rzędu mniejszego od 12.

4. Niech $a_1, \ldots, a_n \in A$. Udowodnić, że
$$f : \mathbb{Z}^n \to A, \qquad f(k_1, \ldots, k_n) := k_1 a_1 + \ldots + k_n a_n$$
jest homomorfizmem i że $f(\mathbb{Z}^n) = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle$.

5. Niech $f : A \to \mathbb{Z}^n$ będzie epimorfizmem. Udowodnić, że
$$A \cong \ker(f) \times \mathbb{Z}^n.$$

6. Niech A będzie niezerową podgrupą $\mathbb{Z}$. Udowodnić, że $A \cong \mathbb{Z}$.

7. Udowodnić, że jeśli A jest rzędu n i $d|n$, to istnieje $B \leqslant A$ taka, że $|B| = d$ (odwrócenie twierdzenia Lagrange'a dla grup abelowych).

8. Udowodnić, że jeśli $A_1, \ldots, A_s$ są podgrupami A takimi, że
   - $A_1 + \ldots + A_s = A$,
   - dla każdego $1 \leqslant i < s$ mamy $(A_1 + \ldots + A_i) \cap A_{i+1} = \{0\}$,

   to $A \cong A_1 \times \ldots \times A_s$.

9. Udowodnić, że jeśli liczby $a, b \in \mathbb{N}$ są względnie pierwsze, to
$$\mathbb{Z}_{ab} \cong \mathbb{Z}_a \times \mathbb{Z}_b.$$

10. Niech A będzie skończona, $a \in A$ oraz $l \in \mathbb{Z}$. Udowodnić, że
$$\text{rząd}(a) = \text{rząd}(la) \cdot \text{NWD}(l, \text{rząd}(a)).$$