ALGEBRA 1B, Lista 7

Niech $\mathbb{P}$ będzie zbiorem liczb pierwszych.

1. Niech A będzie grupą przemienną skończona, $a \in A$ oraz $l \in \mathbb{Z}$. Udowodnić, że
$$\text{rząd}(a) = \text{rząd}(la) \cdot \text{NWD}(l, \text{rząd}(a)).$$

2. Niech A będzie skończoną grupą przemienną. Udowodnić, że A jest izomorficzna z grupą postaci
$$\prod_{p \in \mathbb{P}, i \in \mathbb{N}} (\mathbb{Z}_{p^i})^{a_{p,i}},$$
gdzie prawie wszystkie $a_{p,i}$ są równe 0.

3. Udowodnić, że jeśli istnieje poniższy izomorfizm grup skończonych
$$\prod_{p \in \mathbb{P}, i \in \mathbb{N}} (\mathbb{Z}_{p^i})^{a_{p,i}} \cong \prod_{p \in \mathbb{P}, i \in \mathbb{N}} (\mathbb{Z}_{p^i})^{b_{p,i}},$$
to dla każdych $p \in \mathbb{P}, i \in \mathbb{N}$ mamy $a_{p,i} = b_{p,i}$.

4. Czy grupy $\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_{36}$ i $\mathbb{Z}_{48} \times \mathbb{Z}_{18}$ są izomorficzne?

5. Znaleźć przykład $A \trianglelefteq B \trianglelefteq G$ takich, że $A \ntrianglelefteq G$.

6. Niech $f : G \to H$ będzie homomorfizmem, $N \trianglelefteq G$ i $\pi : G \to G/N$ będzie homomorfizmem ilorazowym. Udowodnić, ze jeśli $N \subseteq \ker(f)$, to istnieje jedyny homomorfizm $f_N : G/N \to H$ taki, że $f = f_N \circ \pi$.

7. Udowodnić, że jeśli $f : G \to H$ jest homomorfizmem i $H_2 \trianglelefteq H_1 \leqslant H$, to wtedy
$$f^{-1}(H_1)/f^{-1}(H_2) \cong H_1/H_2.$$

8. Udowodnić, że:
   (a) Dla $n \geqslant 3$ grupa A_n jest generowana przez zbiór wszystkich cykli długości 3.
   (b) Dla $n \geqslant 1$ mamy $(S_n)' = A_n$.
   (c) Dla $n \geqslant 5$ mamy $(A_n)' = A_n$.

9. Niech G bedzie grupą i $S \subseteq G$. Udowodnić, że jeśli dla każdego $g \in G$ mamy $gSg^{-1} \subseteq \langle S \rangle$, to $\langle S \rangle \trianglelefteq G$.