ALGEBRA 1B, Lista 8

Niech p i q będą liczbami pierwszymi.

1. Niech $a_1, b_1, \ldots, a_n, b_n \in \mathbb{N}$. Udowodnić, że jeśli
$$\mathbb{Z}_p^{a_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p^n}^{a_n} \cong \mathbb{Z}_p^{b_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p^n}^{b_n},$$
to $a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$.

2. Niech $n \in \mathbb{N}$. Udowodnić, że:
   (a) Dla $n \geqslant 1$ mamy $(S_n)' = A_n$.
   (b) Dla $n \geqslant 5$ mamy $(A_n)' = A_n$.

3. Udowodnić, że $(\mathbb{Q}, +)$ nie ma ciągu:
   (a) normalnego o faktorach cyklicznych,
   (b) kompozycyjnego.

4. Dla $n \in \mathbb{N}$ znaleźć ciąg kompozycyjny grupy $\mathbb{Z}_n$.

5. Udowodnić, że G jest nilpotentna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg normalny
$$G = G_0 \trianglerighteq G_1 \trianglerighteq \ldots \trianglerighteq G_n = \{1\}$$
taki, że dla $i < n$ mamy $G_i/G_{i+1} \subseteq C(G/G_{i+1})$.

6. Udowodnić, że dowolna grupa rzędu pq^2 jest rozwiązalna.

7. Udowodnić, że jeśli $|G| = 200$, to G jest rozwiązalna.

8. Udowodnić, że jeśli $|G| < 60$, to G jest rozwiązalna.

9. Znaleźć największą liczbę $n \in \mathbb{N}$, dla której umie Pan/i pokazać, że dla każdej nieparzystej $m < n$, jeśli $|G| = m$, to G jest rozwiązalna.

10. Ile elementów rzędu 7 zawiera grupa prosta rzędu 168?

11. Obejrzeć teledysk o pewnej grupie prostej (nie jest to Monstrum): `http://www.youtube.com/watch?v=UTby_e4-Rhg`