ALGEBRA 1B, Lista 9

G jest grupą, $n \in \mathbb{N}$.

1. Udowodnić, że jeśli B jest zbiorem wolnych generatorów G, to $\langle B \rangle = G$.
2. Udowodnić, że $F_n^{\mathrm{ab}} \cong \mathbb{Z}^n$.
3. Niech X, Y będą zbiorami. Udowodnić, że jeśli $|X| = |Y|$, to $F_X \cong F_Y$.
4. Niech
$$H := \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \leqslant \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}).$$
Udowodnić, że $H \cong F_2$.
5. Udowodnić, że grupa $\langle x, y | x^2 = y^2 = 1 \rangle$ jest nieskończona.
6. Udowodnić, że $S_3 \cong \langle x, y | x^2 = y^3 = 1, xy = y^2 x \rangle$.
7. Udowodnić, że dla $n \geqslant 3$ mamy $D_n \cong \langle x, y | x^n = y^2 = xyxy = 1 \rangle$.