ALGEBRA 1B, Lista 1

Dla zbioru A, $\mathcal{P}(A)$ jest zbiorem wszystkich podzbiorów A, A^A jest zbiorem funkcji z A w A, $S(A)$ jest zbiorem bijekcji zbioru A. Niech $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

1. Udowodnić, że odejmowanie na $\mathbb{Z}$ nie ma elementu neutralnego i że nie jest łączne.
2. Udowodnić, że następujące działanie na $C^\infty(\mathbb{R})$
$$f * g := (f+g)'$$
nie ma elementu neutralnego.
3. Niech
$$\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R}) := \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(A) > 0\}.$$
Udowodnić, że $\mathrm{GL}_n^+(\mathbb{R})$ wraz z działaniem mnożenia macierzy jest grupą.
4. Udowodnić, że $(\mathcal{P}(A), \cup)$ jest grupą wtedy i tylko wtedy, gdy $A = \emptyset$.
5. Udowodnić, że $(A^A, \circ)$ jest grupą wtedy i tylko wtedy, gdy $|A| \leqslant 1$.
6. Udowodnić, że $(S(A), \circ)$ jest grupą przemienną wtedy i tylko wtedy, gdy $|A| \leqslant 2$.
7. Podać przykład (tabelkę) działania $\bigstar$ na zbiorze $\{0,1\}$ takiego, że
$$0\bigstar(0\bigstar 0) \neq (0\bigstar 0)\bigstar 0.$$
Ile istnieje takich działań?
8. Udowodnić, że jeśli w grupie G dla każdego $g \in G$ mamy $g^2 = 1$, to G jest przemienna.
9. Udowodnić, że:
   (a) Mnożenie modulo n jest łączne.
   (b) Mnożenie modulo n jest działaniem na $\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}$ wtedy i tylko wtedy, gdy n jest liczbą pierwszą.
   (c) Jeśli n jest liczbą pierwszą, to $(\mathbb{Z}_n \setminus \{0\}, \cdot_n)$ jest grupą.