ALGEBRA 1B, Lista 10

1. Niech G będzie grupą. Udowodnić, że jeśli B jest zbiorem wolnych generatorów G, to $\langle B\rangle = G$.

2. Niech X, Y będą zbiorami. Udowodnić, że jeśli $|X| = |Y|$, to $F_X \cong F_Y$.

3. Udowodnić, że $S_3 \cong \langle x, y | x^2 = y^3 = xyxy = 1\rangle$.

4. Udowodnić, że zbiór $\{a + b\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ jest podpierścieniem $\mathbb{R}$.

5. Załóżmy, że R jest *pierścieniem Boole'a*, czyli że dla każdego $r \in R$ mamy $r^2 = r$.

   (a) Udowodnić, że dla każdego $r \in R$ mamy $r + r = 0$.

   (b) Dla dowolnego zbioru X znaleźć strukturę pierścienia Boole'a na zbiorze wszystkich podzbiorów X.

6. Niech R będzie pierścieniem z 1 i X zbiorem. Udowodnić, że

$$(R^X)^* = (R^*)^X.$$

7. Niech A będzie grupą przemienną. Udowodnić, że

$$\mathrm{End}(A)^* = \mathrm{Aut}(A).$$

8. Udowodnić, że $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}_2) \cong S_3$.