ALGEBRA 1B, Lista 11

Niech R będzie pierścieniem przemiennym z 1 oraz

$$R[X] := \{\sum_{n=0}^{\infty} a_n X^n \in R[\![X]\!] \mid (\exists N \in \mathbb{N})(\forall n \geqslant N)(a_n = 0)\}.$$

1. Udowodnić, że $R[\![X]\!]$ z działaniami podanymi na wykładzie jest pierścieniem przemiennym z 1.
2. Niech $F = \sum a_i X^i \in R[\![X]\!]$. Udowodnić, że $F \in R[\![X]\!]^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_0 \in R^*$.
3. Udowodnić, że $R[X]$ jest podpierścieniem $R[\![X]\!]$.
4. Niech S będzie podpierścieniem R i załóżmy, że R jest dziedziną. Udowodnić, że S jest dziedziną.
5. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
   (a) R jest dziedziną,
   (b) $R[\![X]\!]$ jest dziedziną,
   (c) $R[X]$ jest dziedziną.
6. Niech R będzie dziedziną i $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \in R[X]$. Udowodnić, że $P \in R[X]^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = \ldots = a_n = 0$ i $a_0 \in R^*$.
7. Znaleźć R oraz $a \in R \setminus \{0\}$ takie, że $1 + aX \in R[X]^*$.
8. Niech $(G, \cdot)$ będzie *półgrupą z 1*, tzn. $\cdot$ jest łączne i ma element neutralny. Niech RG będzie zbiorem funkcji z G w R, które są równe 0 na prawie wszystkich elementach G. Dla $\phi, \psi \in RG, g \in G$ niech

   $$(\phi + \psi)(g) := \phi(g) + \psi(g), \quad (\phi\psi)(g) = \sum_{g_1 g_2 = g} \phi(g_1)\psi(g_2).$$

   Udowodnić, że:
   (a) RG z działaniami zdefiniowanymi powyżej jest pierścieniem z 1.
   (b) RG jest przemienny wtedy i tylko wtedy, gdy działanie w G jest przemienne.
   (c) $R\mathbb{N} = R[X]$ (równość pierścieni!), gdzie $\mathbb{N}$ jest półgrupą ze zwykłym dodawaniem.