ALGEBRA 1B, Lista 12

Niech R będzie pierścieniem przemiennym z 1 i $r_1, \ldots, r_n \in R$.

1. Niech $f : R \to S$ będzie homomorfizmem pierścieni przemiennych z 1 i załóżmy, że S jest dziedziną. Udowodnić, że jeśli istnieje $r \in R$ taki, że $f(r) \neq 0$, to $f(1_R) = 1_S$.

2. Udowodnić, że przekrój dowolnej rodziny ideałów R jest ideałem R.

3. Udowodnić, że $(r_1, \ldots, r_n) = Rr_1 + \ldots + Rr_n$.

4. Niech $I, J \trianglelefteqslant R$ oraz

$$I + J := \{a + b : a \in I, b \in J\}, \ \sqrt{I} := \{a \in R : (\exists n \geqslant 1)(a^n \in I)\}.$$

   Udowodnić, że $I + J \trianglelefteqslant R$ i $\sqrt{I} \trianglelefteqslant R$.

5. Niech $f : R \to S$ będzie homomorfizmem pierścieni przemiennych z 1, $I \trianglelefteqslant R, J \trianglelefteqslant S$. Udowodnić, że:
   - $f^{-1}(J) \trianglelefteqslant R$.
   - Jeśli f jest epimorfizmem, to $f(I) \trianglelefteqslant S$.
   - Podać przykład f, I takich, że $f(I) \not\trianglelefteqslant S$.

6. Udowodnić, że jeśli R jest skończony, to R jest ciałem wtedy i tylko wtedy, gdy R jest dziedziną.

7. Znaleźć $f \in \mathbb{Q}[X]$ taki, że $(f) = (X^2 - 1, X^3 + 1)$.

8. Udowodnić, że ideał $(2, X) \trianglelefteqslant \mathbb{Z}[X]$ nie jest główny.