ALGEBRA 1B, Lista 13

Niech R będzie pierścieniem przemiennym z 1.

1. Niech $I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \ldots$ będą ideałami R. Udowodnić, że $\bigcup I_n$ jest ideałem R.
2. Podać przykład R oraz $I, J \trianglelefteq R$ takich, że $I \cup J \ntrianglelefteq R$.
3. Niech $\phi : R \to S$ będzie epimorfizmem pierścieni, gdzie R jest noetherowski. Udowodnić, że S jest też noetherowski.
4. Znaleźć podpierścień $R \subseteq \mathbb{Z}[X]$ taki, że R nie jest noetherowski.
5. Znaleźć właściwy ideał pierwszy $\mathbb{Z}[X]$, który nie jest maksymalny.
6. Niech $d \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ i $d^2 \in \mathbb{Z}$. Rozważmy funkcję:

$$v : \mathbb{Z}[d] \to \mathbb{Z}, \quad v(n + md) = n^2 - m^2 d^2.$$

Udowodnić, że dla każdych $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[d]$:

(a) $v(\alpha\beta) = v(\alpha)v(\beta)$.

(b) $\alpha \in \mathbb{Z}[d]^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v(\alpha) \in \{-1, 1\}$.