ALGEBRA 1B, Lista 14

Niech R będzie pierścieniem przemiennym z 1 i K będzie ciałem.

1. Udowodnić, że 3 jest rozkładalny i że 5 jest nierozkładalny w $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.
2. Zbadać, czy dana liczba jest elementem rozkładalnym pierścienia R.
   (a) $7+\sqrt{-5}$, $2+3\sqrt{-5}$, $5+4\sqrt{-5}$; $R=\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$,
   (b) $-1+7i$, 5, 23, $1+6i$; $R=\mathbb{Z}[i]$.
3. Niech $p>2$ będzie liczbą pierwszą. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
   (a) p jest elementem rozkładalnym $\mathbb{Z}[i]$,
   (b) p jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych,
   (c) $p \equiv 1 (\mathrm{mod}\, 4)$.
4. Wykazać, że spośród liczb pierwszych jest nieskończenie wiele:
   (a) elementów nierozkładalnych $\mathbb{Z}[i]$,
   (b) elementów rozkładalnych $\mathbb{Z}[i]$.
5. Wyznaczyć z dokładnością do stowarzyszenia wszytkie elementy nierozkładalne w $K[\![X]\!]$.
6. Udowodnić, że pierścień $K[X^2, X^3]$ nie jest UFD.
7. Niech R będzie UFD i $a, b \in R$. Udowodnić, że ideał $(a) \cap (b)$ jest główny.