ALGEBRA 1B, Lista 15

R, S są pierścieniami przemiennymi z 1.

1. Znaleźć NWD i NWW dla:

    (a) $X^4 - X,\ X^6 - X$ w $\mathbb{C}[X]$,

    (b) $X^4 - X,\ X^6 - X$ w $\mathbb{C}[\![X]\!]$,

    (c) $4 - 2i,\ 13 + i$ w $\mathbb{Z}[i]$,

    (d) $13,\ 12 + 5i$ w $\mathbb{Z}[i]$,

2. Dla $I, I', J \trianglelefteq R$ udowodnić, że $I(J + J') = IJ + IJ'$.

3. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:

    (a) Istnieją R_1, R_2 niezerowe pierścienie z 1 takie, że $R \cong R_1 \times R_2$.

    (b) Istnieją $u_1, u_2 \in R \setminus \{0\}$ takie, że $u_1 + u_2 = 1,\ u_1^2 = u_1,\ u_2^2 = u_2$.

4. Udowodnić, że $\mathbb{Q}[X, Y]/(XY) \ncong \mathbb{Q}[X, Y]/(X) \times \mathbb{Q}[X, Y]/(Y)$.

5. Udowodnić, że $(R \times S)^* \cong R^* \times S^*$.

6. Dla $n, m \in \mathbb{N}$ względnie pierwszych udowodnić, że $\mathbb{Z}^*_{mn} \cong \mathbb{Z}^*_m \times \mathbb{Z}^*_n$.

7. Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_k^{\alpha_k}$, gdzie $\alpha_i \in \mathbb{N}$ i $p_1, \dots, p_k$ są liczbami pierwszymi, które są parami różne. Udowodnić, że:

    (a) Dla $\alpha \in \mathbb{N}$ i p pierwszej mamy $|\mathbb{Z}^*_{p^\alpha}| = p^\alpha - p^{\alpha - 1}$,

    (b) $|\mathbb{Z}^*_n| = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}) \cdot \ldots \cdot (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1})$.