ALGEBRA 1B, Lista 2

Niech $n \in \mathbb{N}_{>0}$ i $O(n)$ będzie zbiorem macierzy n na n o współczynnikach rzeczywistych zachowujących iloczyn skalarny i niech H, G będą grupami.

1. Niech $*$ będzie działaniem na $\mathbb{N}$ zdefiniowanym w nastepujący sposób:
$$n * m := n^m.$$
Udowodnić, że $*$ nie jest łączne.

2. Udowodnić, że:
   (a) $I \in O(n)$,
   (b) jeśli $A \in O(n)$, to $A^{-1} \in O(n)$,
   (c) jeśli $A, B \in O(n)$, to $AB \in O(n)$.

3. Napisać tabelkę działania w grupie D_3.

4. Napisać tabelkę działania w grupie D_4.

5. Napisać tabelkę działania w grupie S_3.

6. Niech X będzie zbiorem równolicznym z Y. Znaleźć izomorfizm pomiędzy $S(X)$ i $S(Y)$.

7. Znaleźć izomorfizm pomiędzy D_3 i S_3.

8. Udowodnić, że złożenie homomorfizmów jest homomorfizmem i że funkcja odwrotna do izomorfizmu jest izomorfizmem.

9. Udowodnić, że funkcja n-tej reszty $r_n : (\mathbb{Z}, +) \to (\mathbb{Z}_n, +_n)$ jest homomorfizmem.

10. Udowodnić, że jeśli $f : G \to H$ jest homomorfizmem i $g \in G$, to:
    (a) $f(e_G) = e_H$,
    (b) dla każdego $m \in \mathbb{Z}$ mamy $f(g^m) = f(g)^m$.

11. Niech $*$ będzie działaniem na zbiorze X i $f : X \to G$ bijekcją, taką że dla każdych $x, y \in X$ mamy $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$. Udowodnić, że $(X, *)$ jest grupą izomorficzną z G.