ALGEBRA 1B, Lista 3

Niech G będzie grupą i $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

1. Udowodnić, że jeśli $(A, +)$ jest grupą przemienną i $m \in \mathbb{Z}$, to funkcja
$$f : A \to A, \quad f(a) = ma$$
jest homomorfizmem.

2. Udowodnić, że jeśli $n = |G| \in \{1, 2, 3\}$, to $G \cong \mathbb{Z}_n$.

3. Podać przykład G dla której funkcja
$$f : G \to G, \quad f(g) = g^2$$
nie jest homomorfizmem.

4. Niech $g \in G$. Przyjmijmy, że $\min \emptyset = \infty$. Udowodnić, że:
$$\text{rząd}(g) = \min\{n \in \mathbb{N}_{>0} \mid g^n = 1\}.$$

5. Udowodnić, że jeśli G jest cykliczna, to istnieje $m \in \mathbb{N}_{>0}$ takie, że $G \cong \mathbb{Z}$ lub $G \cong \mathbb{Z}_m$.

6. Udowodnić, że jeśli $f : G \to H$ jest monomorfizmem, to dla każdego $g \in G$ mamy
$$\text{rząd}(g) = \text{rząd}(f(g)).$$

7. Pokazać, że nie istnieje monomorfizm $(\mathbb{Z}_3, +_3) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.

8. Udowodnić, że $D_6 \ncong A_4$.

9. Znaleźć monomorfizm $(\mathbb{Z}_n, +_n) \to (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.

10. Znaleźć monomorfizm $f : S_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$.

11. Udowodnić, że $(\mathbb{Q}, +)$ nie jest skończenie generowana.

12. Udowodnić, że jeśli $\sigma, \tau \in S_n$ są rozłączne, to $\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma$.

13. Sformułować i udowodnić twierdzenie o jednoznaczności rozkładu permutacji na iloczyn cykli rozłącznych.

14. Niech $\sigma, \tau \in S_n$, gdzie τ jest transpozycją. Udowodnić, że σ jest parzysta wtedy i tylko wtedy, gdy $\tau \circ \sigma$ jest nieparzysta.