ALGEBRA 1B, Lista 4

Niech G będzie grupą i $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

1. Udowodnić, że $(\mathbb{Q}, +) \not\cong (\mathbb{Q}, +)^2$.
2. Załóżmy, że g jest jedynym elementem rzędu 2 w G. Udowodnić, że dla każdego $h \in G$ mamy $gh = hg$.
3. Niech $(A, +)$ będzie grupą przemienną. Udowodnić, że poniższy wzór
$$\forall a \in A \qquad 0 \cdot a = a, \;\; 1 \cdot a = -a$$
zadaje działanie $\mathbb{Z}_2$ na A poprzez automorfizmy. Wskazać odpowiadający temu działaniu homomorfizm $\Psi : \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}(A)$. Kiedy Ψ jest monomorfizmem?
4. Załóżmy, że istnieje $g \in G$ taki, że $\text{rząd}(g) \neq 1, 2$. Udowodnić, że $\mathrm{Aut}(G) \neq \{\mathrm{id}_G\}$.
5. Niech
$$\mathbb{Z}_n^* := \{a \in \mathbb{Z}_n \mid (\exists b \in \mathbb{Z}_n)(a \cdot_n b = 1)\}.$$
Udowodnić, że:
   (a) $\mathbb{Z}_n^*$ jest zamknięty na działanie $\cdot_n$ i jest z tym działaniem grupą.
   (b) Dla każdego $k \in \mathbb{Z}_n$ funkcja
   $$\phi_k : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n, \quad \phi_k(x) = k \cdot_n x$$
   jest endomorfizmem.
   (c) Jeśli $\phi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ jest endomorfizmem, to istnieje $k \in \mathbb{Z}_n$ takie, że $\phi = \phi_k$.
   (d) Jeśli $k, l \in \mathbb{Z}_n$, to $\phi_k \circ \phi_l = \phi_{k \cdot_n l}$.
   (e) Jeśli $k \in \mathbb{Z}_n^*$, to $\phi_k \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$.
   (f) Funkcja
   $$\Phi : \mathbb{Z}_n^* \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n), \quad \Phi(k) = \phi_k$$
   jest izomorfizmem.
   (g) $\mathbb{Z}_n^* = \{k \in \mathbb{Z}_n \mid (k, n) = 1\}$.
6. Udowodnić, że jeśli $|G| \leqslant 5$, to G jest przemienna.
7. Wyznaczyć centrum S_3 i centrum D_4.
8. Niech $H \leqslant G$. Udowodnić, że $|G/H| = |H \backslash G|$.