ALGEBRA 1B, Lista 5

Niech G i H będą grupami i $n \in \mathbb{N}_{>1}$.

1. Udowodnić, że $T_n(\mathbb{R})$ nie jest dzielnikiem normalnym w $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
2. Udowodnić, że jeśli $H \leqslant G$ i $[G : H] = 2$, to $H \trianglelefteqslant G$.
3. Załóżmy, że $\phi : G \to H$ jest homomorfizmem. Udowodnić, że:
    (a) $\ker(\phi) \leqslant G$,
    (b) $\mathrm{im}(\phi) \leqslant H$.
4. Udowodnić, że $(\mathbb{R}^*, \cdot)/\{1, -1\} \cong (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$.
5. Udowodnić, że $(\mathbb{C}, +)/\mathbb{Z} \cong (\mathbb{C}^*, \cdot)$.
6. Udowodnić, że $(\mathbb{C}^*, \cdot)/\langle e^{\frac{2\pi i}{n}} \rangle \cong (\mathbb{C}^*, \cdot)$.
7. Udowodnić, że jeśli $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(G)$ jest działaniem, to $H \ltimes_\varphi G$ jest przemienna wtedy i tylko wtedy, gdy H i G są przemienne oraz działanie φ jest trywialne.
8. Niech $H \leqslant G, N \trianglelefteqslant G, H \cap N = \{1\}, G = HN$ i $H \cong H_1, N \cong N_1$. Udowodnić, że istnieje działanie $\varphi : H_1 \to \mathrm{Aut}(N_1)$ takie, że
$$G \cong H_1 \ltimes_\varphi N_1.$$
9. Udowodnić, że istnieje działanie $\varphi : \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}(A_n)$ takie, że
$$S_n \cong \mathbb{Z}_2 \ltimes_\varphi A_n.$$
10. Niech $\varphi : \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ będzie działaniem z zad. 3 listy 4. Udowodnić, że
$$D_n \cong \mathbb{Z}_2 \ltimes_\varphi \mathbb{Z}_n.$$
11. Niech $f : G \to H$ będzie epimorfizmem. Załóżmy, że istnieje *cięcie* f, tzn. homomorfizm $\phi : H \to G$ taki, że $f \circ \phi = \mathrm{id}_H$. Udowodnić, że istnieje działanie $\varphi : H \to \mathrm{Aut}(\ker(f))$ takie, że
$$G \cong H \ltimes_\varphi \ker(f).$$
12. Udowodnić, że A_4 nie zawiera podgrupy rzędu 6.