

ALGEBRA 1B, Lista 7

Niech G będzie grupą i p liczbą pierwszą.

1. Niech $|G| = p$. Udowodnić, że $G \cong \mathbb{Z}_p$.
2. Niech $(n, m) = 1$. Udowodnić, że $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{nm}$.
3. Niech H będzie p -podgrupą G , która jest dzielnikiem normalnym. Udowodnić, że H jest zawarta w każdej p -podgrupie Sylowa G .
4. Udowodnić, że jeśli H jest p -podgrupą Sylowa G , to H jest dzielnikiem normalnym wtedy i tylko wtedy, gdy H jest jedyną p -podgrupą Sylowa G .
5. Udowodnić, że każda grupa rzędu 200 zawiera normalną podgrupę rzędu 25.
6. Znaleźć wszystkie p -podgrupy Sylowa S_p .
7. Załóżmy, że $|G| = p^2$. Udowodnić, że $G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$ lub $G \cong \mathbb{Z}_{p^2}$.
8. Opisać z dokładnością do izomorfizmu wszystkie grupy rzędu mniejszego od 12.