ALGEBRA 1B, Lista 8

Niech G, H będą grupami, A będzie grupa przemienną, $k \in \mathbb{N}_{>0}$ i p liczbą pierwszą.

1. Niech A będzie właściwą podgrupą $\mathbb{Z}$. Udowodnić, że $A \cong \mathbb{Z}$.
2. Niech $H_1 \trianglelefteq H, G_1 \trianglelefteq G$. Udowodnić, że:
   (a) $H_1 \times G_1 \trianglelefteq H \times G$,
   (b) $(H \times G)/(H_1 \times G_1) \cong (H/H_1) \times (G/G_1)$.
3. Załóżmy, że mamy $a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k \in \mathbb{N}$ takie, że
   $$\mathbb{Z}_p^{a_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p^k}^{a_k} \cong \mathbb{Z}_p^{b_1} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p^k}^{b_k}.$$
   Udowodnić, że $a_1 = b_1, \ldots, a_k = b_k$.
4. Udowodnić, że:
   (a) $\operatorname{Tor}(A) \trianglelefteq A$,
   (b) grupa $A/\operatorname{Tor}(A)$ jest beztorsyjna,
   (c) jeśli A jest skończona, to $\operatorname{Tor}(\mathbb{Z}^k \times A) = A$.
5. Znaleźć przykład G i $g, h \in G$ takich, że rząd$(g) =$ rząd$(h) = 2$, ale rząd$(gh) = \infty$.
6. Sprawdzić, czy następujące grupy są izomorficzne:
   (a) $\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_{36}$ i $\mathbb{Z}_{48} \times \mathbb{Z}_{18}$,
   (b) $\mathbb{Z}_{21} \times \mathbb{Z}_{40}$ i $\mathbb{Z}_{168} \times \mathbb{Z}_5$,
   (c) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$ i $\mathbb{Z}_{315}$.