

ALGEBRA 1B, Lista 9

Niech G będzie grupą, $n \in \mathbb{N}$ i p, q liczbami pierwszymi.

1. Udowodnić, że:
 - (a) Dla $n \geq 3$ grupa A_n jest generowana przez zbiór wszystkich cykli długości 3.
 - (b) Dla $n \geq 1$ mamy $(S_n)' = A_n$.
 - (c) Dla $n \geq 5$ mamy $(A_n)' = A_n$.
2. Niech $S \subseteq G$. Udowodnić, że jeśli dla każdego elementu $g \in G$ mamy $gSg^{-1} \subseteq \langle S \rangle$, to $\langle S \rangle \trianglelefteq G$.
3. Udowodnić, że dowolna grupa rzędu pq^2 jest rozwiązalna.
4. Udowodnić, że jeśli $|G| = 200$, to G jest rozwiązalna.
5. Udowodnić, że jeśli $|G| < 60$, to G jest rozwiązalna.
6. Znaleźć największą liczbę $n \in \mathbb{N}$, dla której umie Pan/i pokazać, że dla każdej nieparzystej $m < n$, jeśli $|G| = m$, to G jest rozwiązalna (obecny rekord: $n = 525$).
7. Ile elementów rzędu 7 zawiera grupa prosta rzędu 168?
8. Obejrzeć teledysk o pewnej grupie prostej (nie jest to Monstrum):
http://www.youtube.com/watch?v=UTby_e4-Rhg
9. Udowodnić, że $(\mathbb{Q}, +)$ nie ma ciągu:
 - (a) normalnego o faktorach cyklicznych,
 - (b) kompozycyjnego.
10. Znaleźć ciąg kompozycyjny grupy \mathbb{Z}_n .