

ALGEBRA 1B, Lista 10

Niech R będzie pierścieniem przemiennym z 1 i K będzie ciałem.

1. Udowodnić, że 3 jest rozkładalny i że 5 jest nierozkładalny w $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.
2. Zbadać, czy dana liczba jest elementem rozkładalnym pierścienia R .
 - (a) $7 + \sqrt{-5}$, $2 + 3\sqrt{-5}$, $5 + 4\sqrt{-5}$; $R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$,
 - (b) $-1 + 7i$, 5 , 23 , $1 + 6i$; $R = \mathbb{Z}[i]$.
3. Niech $p > 2$ będzie liczbą pierwszą. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
 - (a) p jest elementem rozkładalnym $\mathbb{Z}[i]$,
 - (b) p jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych,
 - (c) $p \equiv 1 \pmod{4}$.
4. Wykazać, że spośród liczb pierwszych jest nieskończenie wiele:
 - (a) elementów nierozkładalnych $\mathbb{Z}[i]$,
 - (b) elementów rozkładalnych $\mathbb{Z}[i]$.
5. Wyznaczyć z dokładnością do stowarzyszenia wszystkie elementy nierozkładalne w $K[[X]]$.
6. Udowodnić, że pierścień $K[X^2, X^3]$ nie jest UFD.
7. Niech R będzie UFD i $a, b \in R$. Udowodnić, że ideał $(a) \cap (b)$ jest główny.