ALGEBRA 1B, Lista 11

R jest pierścieniem przemiennym z 1, K jest ciałem.

1. Załóżmy, że R jest UFD i niech $f, h \in R[X]$ mają zawartość równą 1. Udowodnić, że zawartość fh jest też równa 1.

2. Niech $f \in R[X]$ i załóżmy, że $\deg(f) \in \{2, 3\}$. Udowodnić, że f jest nierozkładalny wtedy i tylko wtedy, gdy dla każdego $r \in R$ mamy $f(r) \neq 0$. Znaleźć kontrprzykład na powyższą równoważność, gdy pominiemy założenie, że $\deg(f) \in \{2, 3\}$.

3. Niech $f, g \in K[X]$ gdzie $f = \sum a_i X^i$. Definiujemy $f \circ g$ jako $\sum a_i g^i$. Udowodnić, że:

   (a) Funkcja $\Psi_g : K[X] \to K[X]$, $\Psi_g(h) = h \circ g$ jest homomorfizmem.

   (b) Zbiór wielomianów $\{f \in K[X] \mid \deg(f) = 1\}$ jest zamknięty na działanie $\circ$ i wraz tym działaniem jest grupą, która jest izomorficzna z $(K, +) \rtimes K^*$, gdzie K^* działa na $(K, +)$ poprzez mnożenie.

   (c) Jeśli $\deg(g) = 1$, to f jest nierozkładalny wtedy i tylko wtedy, gdy $f \circ g$ jest nierozkładalny.

4. Udowodnić, że $X^{p-1} + X^{p-2} + \cdots + X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$ jest nierozkładalny, gdzie p jest liczbą pierwszą.

5. Znaleźć NWD i NWW dla:

   (a) $X^4 - X,\ X^6 - X$ w $\mathbb{C}[X]$,

   (b) $X^4 - X,\ X^6 - X$ w $\mathbb{C}[\![X]\!]$,

   (c) $4 - 2i,\ 13 + i$ w $\mathbb{Z}[i]$,

   (d) $13,\ 12 + 5i$ w $\mathbb{Z}[i]$,

6. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:

   (a) Istnieją R_1, R_2 niezerowe pierścienie z 1 takie, że $R \cong R_1 \times R_2$.

   (b) Istnieją $u_1, u_2 \in R \setminus \{0\}$ takie, że $u_1 + u_2 = 1,\ u_1^2 = u_1,\ u_2^2 = u_2$.

7. Niech $n \in \mathbb{N}$ oraz $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_k^{\alpha_k}$, gdzie $\alpha_i \in \mathbb{N}$ i $p_1, \ldots, p_k$ są liczbami pierwszymi, które są parami różne. Udowodnić, że:

   (a) Dla $\alpha \in \mathbb{N}$ i p pierwszej mamy $|\mathbb{Z}_{p^\alpha}^*| = p^\alpha - p^{\alpha-1}$,

   (b) $|\mathbb{Z}_n^*| = (p_1^{\alpha_1} - p_1^{\alpha_1 - 1}) \cdot \ldots \cdot (p_k^{\alpha_k} - p_k^{\alpha_k - 1})$.