

ALGEBRA 1B, Lista 2

Niech $n \in \mathbb{N}_{>0}$ i G będzie grupą.

1. Niech $\mathbb{Z}_n^* := \{a \in \mathbb{Z}_n \mid a \text{ jest względnie pierwsza z } n\}$. Udowodnić, że:

(a) Mnożenie modulo n jest łączne na \mathbb{Z}_n .

(b) Mnożenie modulo n jest działaniem na \mathbb{Z}_n^* i $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot_n)$ jest grupą.

2. Napisać tabelkę D_3 .

3. Napisać tabelkę grupy izometrii prostokąta nie będącego kwadratem.

4. Dla kąta α i dowolnej symetrii osiowej S udowodnić, że

$$O_\alpha \circ S = S \circ O_{-\alpha}.$$

5. Dla $k, l \in \mathbb{Z}$ i $g \in G$ udowodnić, że $(g^k)^l = g^{kl}$ oraz $g^{k+l} = g^k g^l$.

6. Niech $(A, +)$ będzie grupą przemienną i $m \in \mathbb{Z}$. Udowodnić, że funkcja

$$f : A \rightarrow A, \quad f(a) := ma$$

jest homomorfizmem.

7. Znaleźć izomorfizm pomiędzy D_3 i S_3 .

8. Znaleźć monomorfizm $(\mathbb{R}, +) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{R})$.

9. Znaleźć monomorfizm $\mathbb{Z}_n \rightarrow D_n$.

10. Niech G będzie grupą z zadania 3. Udowodnić, że G nie jest izomorficzna z \mathbb{Z}_4 .

11. Znaleźć monomorfizm $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{R})$.

12. Udowodnić, że $S^1 \cong \text{SO}(2)$.

13. Udowodnić, że złożenie homomorfizmów jest homomorfizmem i że funkcja odwrotna do izomorfizmu jest izomorfizmem.

14. Udowodnić, że jeśli $f : G \rightarrow H$ jest homomorfizmem i $g \in G$, to dla każdego $m \in \mathbb{Z}$ mamy $f(g^m) = f(g)^m$.

15. Niech X będzie zbiorem równolicznym z Y . Znaleźć izomorfizm pomiędzy S_X i S_Y .