

ALGEBRA 1B, Lista 3

Niech G i H będą grupami i $n \in \mathbb{N}_{>0}$. Zadania z gwiazdką są przeznaczone na konwersatorium.

1. Niech $f : G \rightarrow H$ będzie homomorfizmem, $G_1 \leq G$ i $H_1 \leq H$. Udowodnić, że $f(G_1) \leq H$ i $f^{-1}(H_1) \leq G$.
2. Udowodnić, że jeśli $n = |G| \leq 3$, to $G \cong \mathbb{Z}_n$.
3. Udowodnić, że funkcja

$$f : G \rightarrow G, \quad f(g) = g^2$$

jest homomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy G jest przemienna.

4. Niech $g \in G$. Przyjmijmy, że $\min \emptyset = \infty$. Udowodnić, że:

$$\text{rzęd}(g) = \min\{n \in \mathbb{N}_{>0} \mid g^n = 1\}.$$

5. Udowodnić, że jeśli $f : G \rightarrow H$ jest monomorfizmem, to dla każdego $g \in G$ mamy

$$\text{rzęd}(g) = \text{rzęd}(f(g)).$$

6. Pokazać, że nie istnieje monomorfizm $(\mathbb{Z}_3, +_3) \rightarrow (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.
7. Udowodnić, że $D_6 \not\cong A_4$.
8. Znaleźć monomorfizm $(\mathbb{Z}_n, +_n) \rightarrow (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.
9. Znaleźć monomorfizm $f : S_n \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{Q})$.
10. Udowodnić, że $(\mathbb{Q}, +)$ nie jest skończenie generowana.
11. Udowodnić, że jeśli $\sigma, \tau \in S_n$ są rozłączne, to

$$\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma, \quad X_{\sigma \circ \tau} = X_\sigma \cup X_\tau.$$

12. Udowodnić twierdzenie z wykładu o jednoznaczności rozkładu permutacji na iloczyn cykli rozłącznych.
- 13* Niech $\sigma, \tau \in S_n$, gdzie τ jest transpozycją. Korzystając tylko z definicji inwersji, udowodnić że σ jest parzysta wtedy i tylko wtedy, gdy $\tau \circ \sigma$ jest nieparzysta.

- 14* Udowodnić, że $S_n = \langle (12), (12 \dots n) \rangle$.

- 15* Niech E_{ij} będzie macierzą, która na (i, j) -tym miejscu ma 1 a wszędzie indziej 0. Udowodnić, że:

$$\text{GL}_n(\mathbb{R}) = \langle I + rE_{ij}, I + sE_{nn} \mid r \in \mathbb{R}, s \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, i \neq j \rangle,$$

$$\text{SL}_n(\mathbb{R}) = \langle I + rE_{ij} \mid r \in \mathbb{R}, i \neq j \rangle.$$