ALGEBRA 1B, Lista 4

Niech $n \in \mathbb{N}_{>0}$, G będzie grupą i $H \leqslant G$.

1. Udowodnić, że dla $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ mamy $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) \cdot v = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.
2. Dla $n \geqslant 3$, opisać klasę sprzężoności (123) w S_n.
3. Niech $(A, +)$ będzie grupą przemienną. Udowodnić, że poniższy wzór
$$\forall a \in A \qquad 0 \cdot a = a, \;\; 1 \cdot a = -a$$
zadaje działanie $\mathbb{Z}_2$ na A poprzez automorfizmy. Wskazać odpowiadający temu działaniu homomorfizm $\Psi : \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}(A)$. Kiedy Ψ jest monomorfizmem?
4. Załóżmy, że istnieje $g \in G$ taki, że $\text{rząd}(g) \neq 1, 2$. Udowodnić, że $\mathrm{Aut}(G) \neq \{\mathrm{id}_G\}$.
5. Udowodnić, że:
   (a) Dla każdego $k \in \mathbb{Z}_n$ funkcja
   $$\phi_k : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n, \quad \phi_k(x) = k \cdot_n x$$
   jest endomorfizmem.
   (b) Jeśli $\phi : \mathbb{Z}_n \to \mathbb{Z}_n$ jest endomorfizmem, to istnieje $k \in \mathbb{Z}_n$ takie, że $\phi = \phi_k$.
   (c) Jeśli $k, l \in \mathbb{Z}_n$, to $\phi_k \circ \phi_l = \phi_{k \cdot_n l}$.
   (d) Jeśli $k \in \mathbb{Z}_n^*$, to $\phi_k \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$.
   (e) Funkcja
   $$\Phi : \mathbb{Z}_n^* \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n), \quad \Phi(k) = \phi_k$$
   jest izomorfizmem.
6. Niech $H \leqslant G$. Udowodnić, że $|G/H| = |H \backslash G|$.
7. Udowodnić, że jeśli $[G : H] = 2$, to $H \trianglelefteq G$.
8. Udowodnić, że $T_n(\mathbb{R})$ nie jest dzielnikiem normalnym w $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
9. Wyznaczyć centrum S_3 i centrum D_4.