**ALGEBRA 1B, Lista 5**

Niech $n \in \mathbb{N}_{>0}$ i $G$ będzie grupą.

1. Niech $g \in G$ będzie rzędu $n$. Udowodnić, że dla każdego $m \in \mathbb{Z}$ mamy $g^m = e$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n|m$.

2. Udowodnić, że $(\mathbb{R}^*, \cdot)/\{1, -1\} \cong (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$.

3. Udowodnić, że $(\mathbb{C}, +)/\mathbb{Z} \cong (\mathbb{C}^*, \cdot)$.

4. Udowodnić, że $(\mathbb{C}^*, \cdot)/\langle e^{\frac{2\pi i}{n}} \rangle \cong (\mathbb{C}^*, \cdot)$.

5. Udowodnić, że $A_4$ nie zawiera podgrupy rzędu 6.

6. Podać przykład $G$ i $N \trianglelefteq H \trianglelefteq G$, takich że $N \ntrianglelefteq G$.

7. Niech $p$ będzie liczbą pierwszą i załóżmy, że $|G| = p^2$. Udowodnić, że $G \cong \mathbb{Z}_{p^2}$ lub $G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.

8. Niech $\varphi : \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ będzie działaniem z zad. 3 listy 4. Udowodnić, że $D_n \cong \mathbb{Z}_n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_2$.

9. Udowodnić, że $A_4 \cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_3$.

10. Niech $|G| = 6$. Udowodnić, że $G \cong \mathbb{Z}_6$ lub $G \cong S_3$.

11. Niech $G$ będzie podgrupą $S_\mathbb{R}$ składającą się z bijekcji *afinicznych*, tzn. postaci $x \mapsto ax + b$. Udowodnić, że $G \cong (\mathbb{R}, +) \rtimes (\mathbb{R}^*, \cdot)$.

12* Sformułować i udowodnić uogólnienie poprzedniego zadania z przypadku $\mathbb{R}$ do przypadku $\mathbb{R}^n$.

13* Niech $|G| = 8$. Udowodnić, że $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ lub $G \cong \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_4$ lub $G \cong \mathbb{Z}_8$ lub $G \cong D_4$ lub $G \cong Q_8$.

14* Udowodnić, że $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \cong S_3$.