ALGEBRA 1B, Lista 6

Niech $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$ oraz G i H będą grupami.

1. Niech $H \leqslant G$. Udowodnić, że $H \leqslant N(H) \leqslant G$.
2. Niech $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(H)$ będzie działaniem. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
   (a) $H \rtimes_\varphi G$ jest przemienna.
   (b) H i G są przemienne oraz działanie φ jest trywialne.
3. Niech $H_1 \trianglelefteq H, G_1 \trianglelefteq G$. Udowodnić, że $H_1 \times G_1 \trianglelefteq H \times G$ oraz
$$(H \times G)/(H_1 \times G_1) \cong (H/H_1) \times (G/G_1).$$
4. Udowodnić, że jeśli n i m są względnie pierwsze, to $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{nm}$.
5. Załóżmy, że $|G| = pq$, gdzie p, q są pierwsze i $p < q$. Udowodnić, że:
   (a) $G \cong \mathbb{Z}_q \rtimes \mathbb{Z}_p$.
   (b) Jeśli p nie dzieli $q-1$, to $G \cong \mathbb{Z}_{pq}$.
   (c) Jeśli p dzieli $q-1$, to istnieje nieprzemienna grupa rzędu pq.
6. Niech $\Psi : G \to H$ będzie epimorfizmem. Załóżmy, że istnieje *cięcie* Ψ, tzn. homomorfizm $s : H \to G$ taki, że $\Psi \circ s = \mathrm{id}_H$. Udowodnić, że $G \cong \ker(\Psi) \rtimes H$.
7. Znaleźć wszystkie p-podgrupy Sylowa S_p, gdzie p jest liczbą pierwszą. Wywnioskować, że $(p-1)! \equiv -1(\mod p)$.
8. Niech A będzie podgrupą $\mathbb{Z}$. Udowodnić, że $A = \{0\}$ lub $A \cong \mathbb{Z}$.
9. Znaleźć produkt grup cyklicznych, z którym izomorficzna jest grupa
$$\mathbb{Z}^3/\langle(10,11,8),(4,7,4),(4,4,4)\rangle.$$
10. Załóżmy, że mamy $a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k \in \mathbb{N}$ takie, że
$$\mathbb{Z}_p^{a_1} \times \mathbb{Z}_{p^2}^{a_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p^k}^{a_k} \cong \mathbb{Z}_p^{b_1} \times \mathbb{Z}_{p^2}^{b_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p^k}^{b_k}.$$
Udowodnić, że $a_1 = b_1, \ldots, a_k = b_k$.
11. Sprawdzić, czy następujące grupy są izomorficzne:
   (a) $\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_{36}$ i $\mathbb{Z}_{48} \times \mathbb{Z}_{18}$,
   (b) $\mathbb{Z}_{21} \times \mathbb{Z}_{40}$ i $\mathbb{Z}_{168} \times \mathbb{Z}_5$,
   (c) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$ i $\mathbb{Z}_{315}$.

12* Opisać z dokładnością do izomorfizmu grupy rzędu mniejszego od 12.