ALGEBRA 1B, Lista 8

Niech R będzie pierścieniem i $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

1. Niech G będzie grupą. Udowodnić, że jeśli B jest zbiorem wolnych generatorów G, to $\langle B \rangle = G$.

2. Niech X, Y będą zbiorami. Udowodnić, że jeśli $|X| = |Y|$, to $F_X \cong F_Y$.

3. Udowodnić, że $D_n \cong \langle x, y \mid x^2, y^n, xyxy \rangle$.

4. Załóżmy, że R jest *pierścieniem Boole'a*, czyli że dla każdego $r \in R$ mamy $r^2 = r$.

   (a) Udowodnić, że dla każdego $r \in R$ mamy $r + r = 0$.

   (b) Dla dowolnego zbioru X znaleźć strukturę pierścienia Boole'a na zbiorze wszystkich podzbiorów X.

5. Znaleźć monomorfizmy $R \to \mathrm{End}(R, +)$ oraz $R^* \to \mathrm{Aut}(R, +)$.

6. Udowodnić, że $R[\![X]\!]$ z działaniami podanymi na wykładzie jest pierścieniem przemiennym z 1.

7. Niech $F = \sum a_i X^i \in R[\![X]\!]$. Udowodnić, że $F \in R[\![X]\!]^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_0 \in R^*$.

8. Udowodnić, że $R[X]$ jest podpierścieniem $R[\![X]\!]$.

9. Niech R będzie dziedziną i $P = a_0 + a_1 X + \ldots + a_n X^n \in R[X]$. Udowodnić, że $P \in R[X]^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy $a_1 = \ldots = a_n = 0$ i $a_0 \in R^*$.

10. Znaleźć R oraz $a \in R \setminus \{0\}$ takie, że $1 + aX \in R[X]^*$.

11. Niech $f : R \to S$ będzie homomorfizmem pierścieni przemiennych z 1 i załóżmy, że S jest dziedziną. Udowodnić, że jeśli istnieje $r \in R$ taki, że $f(r) \neq 0$, to $f(1_R) = 1_S$.

12. Udowodnić, że $(r_1, \ldots, r_n) = r_1 R + \ldots + r_n R$.

13* Niech
$$H := \left\langle \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \right\rangle \leqslant \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}).$$
Udowodnić, że grupa H jest wolna.