ALGEBRA 1B, Lista 9

Niech R będzie pierścieniem przemiennym z 1.

1. Niech $I \trianglelefteqslant R$ oraz
$$\sqrt{I} := \{a \in R : (\exists n \in \mathbb{N})(a^n \in I)\}.$$
Udowodnić, że $\sqrt{I} \trianglelefteqslant R$.

2. Niech $f : R \to S$ będzie homomorfizmem pierścieni przemiennych z 1, $I \trianglelefteqslant R, J \trianglelefteqslant S$. Udowodnić, że:
   - $f^{-1}(J) \trianglelefteqslant R$.
   - Jeśli f jest epimorfizmem, to $f(I) \trianglelefteqslant S$.
   - Podać przykład f, I takich, że $f(I) \ntrianglelefteq S$.

3. Udowodnić, że jeśli R jest skończony, to R jest ciałem wtedy i tylko wtedy, gdy R jest dziedziną.

4. Podać przykład ciała, które ma 4 elementy.

5. Znaleźć $f \in \mathbb{Q}[X]$ taki, że $(f) = (X^2 - 1, X^3 + 1)$.

6. Udowodnić, że ideał $(2, X) \trianglelefteqslant \mathbb{Z}[X]$ nie jest główny.

7. Udowodnić, że pierścień $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ jest euklidesowy.

8. Niech $\phi : R \to S$ będzie epimorfizmem pierścieni, gdzie R jest noetherowski. Udowodnić, że S jest też noetherowski.

9. Znaleźć podpierścień $R \subseteq \mathbb{Z}[X]$ taki, że R nie jest noetherowski.

10. Niech $d \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ i $d^2 \in \mathbb{Z}$. Rozważmy funkcję:
$$v : \mathbb{Z}[d] \to \mathbb{Z}, \quad v(n + md) = n^2 - m^2 d^2.$$
Udowodnić, że dla każdych $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}[d]$:
    (a) $v(\alpha\beta) = v(\alpha)v(\beta)$.
    (b) $\alpha \in \mathbb{Z}[d]^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v(\alpha) \in \{-1, 1\}$.