ALGEBRA 1B, Lista 1

Dla zbioru X, $\mathcal{P}(X)$ jest zbiorem wszystkich podzbiorów X i S_X jest zbiorem wszystkich bijekcji z X w X.
Zadania 7. – 10. są przeznaczone na konwersatorium.

1. Podać przykład (tabelkę) działania $\bigstar$ na zbiorze $\{0,1\}$ takiego, że
$$0\bigstar(0\bigstar 0) \neq (0\bigstar 0)\bigstar 0.$$
Ile istnieje takich działań?

2. Udowodnić, że działanie $+$ na zbiorze $\mathbb{R}\cup\{\infty\}$ (zdefiniowane na wykładzie) jest łączne i ma element neutralny, ale $(\mathbb{R}\cup\{\infty\},+)$ nie jest grupą.

3. Udowodnić, że odejmowanie na $\mathbb{Z}$ nie ma elementu neutralnego i że nie jest łączne.

4. Niech G będzie pewną grupą przekształceń X. Udowodnić, że $\mathrm{id}_X \in G$.

5. Udowodnić, że jeśli X ma co najmniej 2 elementy, to (X, L) nie jest grupą, gdzie dla $a, b \in X$ mamy $a\mathrm{L}b = a$.

6. Udowodnić, że jeśli X ma co najmniej 3 elementy, to grupa $(S_X, \circ)$ nie jest przemienna.

7. Niech $*$ będzie działaniem na zbiorze X i $a, b, c \in X$. Udowodnić, że:
   (a) Jeśli b i c są elementami neutralnymi $*$, to $b = c$.
   (b) Jeśli $*$ jest łączne, ma element neutralny e, $a * b = e$ i $c * a = e$, to $b = c$.
   (c) Jeśli $(X, *)$ jest grupą z elementem neutralnym e i $a * b = e$, to $b * a = e$.

8. Niech $f : X \to X$. Udowodnić, że:
   (a) Funkcja f jest "na" wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $g : X \to X$ taka, że $f \circ g = \mathrm{id}_X$.
   (b) Funkcja f jest "1-1" wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $g : X \to X$ taka, że $g \circ f = \mathrm{id}_X$.

9. Udowodnić, że jeśli X jest niepusty, to:
   (a) $(\mathcal{P}(X), \cup)$ nie jest grupą,
   (b) $(\mathcal{P}(X), \cap)$ nie jest grupą.

10. Udowodnić, że jeśli w grupie $(G, *)$ z elementem neutralnym e dla każdego $g \in G$ mamy $g * g = e$, to G jest przemienna.