ALGEBRA 1B, Lista 11

Niech R będzie pierścieniem przemiennym z 1 i K będzie ciałem.

1. Udowodnić, że 3 jest rozkładalny i że 5 jest nierozkładalny w $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.

2. Zbadać, czy dana liczba jest elementem rozkładalnym pierścienia R.

   (a) $7+\sqrt{-5}$, $2+3\sqrt{-5}$, $5+4\sqrt{-5}$; $R=\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$,

   (b) $-1+7i$, 5, 23, $1+6i$; $R=\mathbb{Z}[i]$.

3. Wyznaczyć z dokładnością do stowarzyszenia wszytkie elementy nierozkładalne w $K[\![X]\!]$.

4. Udowodnić, że pierścień $K[X^2,X^3]$ nie jest UFD.

5. Niech R będzie UFD i $a,b\in R$. Udowodnić, że ideał $(a)\cap(b)$ jest główny.

6. Dla każdej liczby pierwszej p, utożsamiamy $\mathbb{Z}_{(p)}$ z podpierścieniem $\mathbb{Q}$. Udowodnić, że:

$$\bigcap_{p\text{-pierwsza}} \mathbb{Z}_{(p)} = \mathbb{Z}.$$

7. Niech $p>2$ będzie liczbą pierwszą. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:

   (a) p jest elementem rozkładalnym $\mathbb{Z}[i]$,

   (b) p jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych,

   (c) p przystaje do 1 modulo 4.

8. Wykazać, że spośród liczb pierwszych jest nieskończenie wiele:

   (a) elementów nierozkładalnych $\mathbb{Z}[i]$,

   (b) elementów rozkładalnych $\mathbb{Z}[i]$.

9. Niech $f,g\in K[X]$ gdzie $f=\sum a_iX^i$. Definiujemy $f\circ g$ jako $\sum a_ig^i$. Udowodnić, że:

   (a) Funkcja $\Psi_g : K[X]\to K[X]$, $\Psi_g(h)=h\circ g$ jest homomorfizmem.

   (b) Zbiór wielomianów $\{f\in K[X] \mid \deg(f)=1\}$ jest zamknięty na działanie $\circ$ i wraz tym działaniem jest grupą, która jest izomorficzna z $K^*\ltimes(K,+)$, gdzie K^* działa na $(K,+)$ poprzez mnożenie.

   (c) Jeśli $\deg(g)=1$, to f jest nierozkładalny wtedy i tylko wtedy, gdy $f\circ g$ jest nierozkładalny.

10. Udowodnić, że $X^{p-1}+X^{p-2}+\dots+X+1\in\mathbb{Q}[X]$ jest nierozkładalny, gdzie p jest liczbą pierwszą.