

ALGEBRA 1B, Lista 2

Zadania 12. – 15. są przeznaczone na konwersatorium.

Niech $n \in \mathbb{N}_{>0}$ i G, H, N będą grupami.

1. Niech $\mathbb{Z}_n^* := \{a \in \mathbb{Z}_n \mid a \text{ jest względnie pierwsza z } n\}$. Udowodnić, że:
 - (a) Mnożenie modulo n jest łączne na \mathbb{Z}_n .
 - (b) Mnożenie modulo n jest działaniem na \mathbb{Z}_n^* i $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot_n)$ jest grupą.
2. Napisać tabelkę D_3 .
3. Napisać tabelkę grupy izometrii prostokąta nie będącego kwadratem.
4. Dla $k, l \in \mathbb{Z}$ i $g \in G$ udowodnić, że $(g^k)^l = g^{kl}$ oraz $g^{k+l} = g^k g^l$.
5. Niech $(A, +)$ będzie grupą przemienną i $m \in \mathbb{Z}$. Udowodnić, że funkcja

$$f : A \rightarrow A, \quad f(a) := ma$$

jest homomorfizmem.

6. Znaleźć izomorfizm pomiędzy D_3 i S_3 .
7. Znaleźć monomorfizm $(\mathbb{R}, +) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{R})$.
8. Znaleźć monomorfizm $\mathbb{Z}_n \rightarrow D_n$.
9. Niech G będzie grupą z zadania 3. Udowodnić, że G nie jest izomorficzna z grupą $(\mathbb{Z}_4, +_4)$.
10. Znaleźć monomorfizm $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot) \rightarrow \text{GL}_2(\mathbb{R})$.
11. Udowodnić, że jeśli $f : G \rightarrow H$ jest homomorfizmem i $g \in G$, to dla każdego $m \in \mathbb{Z}$ mamy $f(g^m) = f(g)^m$.
12. Udowodnić, że
 - (a) złożenie homomorfizmów jest homomorfizmem,
 - (b) funkcja odwrotna do izomorfizmu jest izomorfizmem,
 - (c) jeśli $G \cong H$ i $H \cong N$, to $G \cong N$.
13. Niech X będzie zbiorem równolicznym ze zbiorem Y . Znaleźć izomorfizm pomiędzy S_X i S_Y .
14. Niech $*$ będzie działaniem na zbiorze X i $f : X \rightarrow G$ bijekcją, taką że dla każdych $x, y \in X$ mamy $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$. Udowodnić, że $(X, *)$ jest grupą izomorficzną z G .

15. Dla kątów α i β udowodnić, że

(a) $O_\alpha \circ O_\beta = O_{\alpha+\beta}$,

(b) $S_\alpha \circ S_\beta = O_{2(\alpha-\beta)}$,

(c) $O_\alpha \circ S_\beta = S_{\frac{\alpha}{2}+\beta}$,

(d) $S_\alpha \circ O_\beta = S_{\alpha-\frac{\beta}{2}}$,

(e) $O_\alpha \circ S_\beta = S_\beta \circ O_{-\alpha}$.