ALGEBRA 1B, Lista 3

Zadania 12. – 14. są przeznaczone na konwersatorium.
Niech G i H będą grupami i $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

1. Niech $f : G \to H$ będzie homomorfizmem, $G_1 \leqslant G$ i $H_1 \leqslant H$. Udowodnić, że $f(G_1) \leqslant H$ i $f^{-1}(H_1) \leqslant G$.

2. Udowodnić, że jeśli $n = |G| \leqslant 3$, to $G \cong \mathbb{Z}_n$.

3. Udowodnić, że funkcja
$$f : G \to G, \quad f(g) = g^2$$
jest homomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy G jest przemienna.

4. Niech $g \in G$. Przyjmijmy, że $\min \emptyset = \infty$. Udowodnić, że:
$$\text{rząd}(g) = \min\{n \in \mathbb{N}_{>0} \mid g^n = 1\}.$$

5. Udowodnić, że jeśli $f : G \to H$ jest monomorfizmem, to dla każdego $g \in G$ mamy
$$\text{rząd}(g) = \text{rząd}(f(g)).$$

6. Pokazać, że nie istnieje monomorfizm $(\mathbb{Z}_3, +_3) \to (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.

7. Udowodnić, że $D_6 \ncong A_4$.

8. Znaleźć monomorfizm $(\mathbb{Z}_n, +_n) \to (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.

9. Znaleźć monomorfizm $f : S_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{Q})$.

10. Udowodnić, że $(\mathbb{Q}, +)$ nie jest skończenie generowana.

11. Udowodnić, że jeśli $\sigma, \tau \in S_n$ są rozłączne, to
$$\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma, \qquad X_{\sigma\circ\tau} = X_\sigma \cup X_\tau.$$

12. Wykazać, że każda permutacja parzysta z S_n $(n \geqslant 3)$ jest złożeniem pewnej liczby cykli długości 3 (niekoniecznie rozłącznych).

13. Udowodnić, że $S_n = \langle (12), (12\ldots n) \rangle$.

14. Niech E_{ij} będzie macierzą, która na (i, j)-tym miejscu ma 1 a wszędzie indziej 0. Udowodnić, że:
$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) = \langle I + rE_{ij}, I + sE_{nn} \mid r \in \mathbb{R},\ s \in \mathbb{R} \setminus \{-1\},\ i \neq j \rangle,$$
$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \langle I + rE_{ij} \mid r \in \mathbb{R},\ i \neq j \rangle.$$