ALGEBRA 1B, Lista 4

Zadania 11. – 12. są przeznaczone na konwersatorium.
Niech G będzie grupą i $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

1. Niech $\sigma = (a_1, \ldots, a_k) \in S_n$ i $\tau = (b_1, \ldots, b_l) \in S_n$ $(2 \leqslant k, l \leqslant n)$ będą cyklami takimi, że zbiory $\{a_1, \ldots, a_k\}$, $\{b_1, \ldots, b_l\}$ mają dokładnie jeden element wspólny. Udowodnić, że $\sigma \circ \tau$ jest cyklem długości $k + l - 1$.

2. Dana jest permutacja

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 \\ 3 & 5 & 4 & 1 & 7 & 11 & 8 & 6 & 9 & 2 & 10 \end{pmatrix}$$

Obliczyć σ^{999} (wskazówka: użyć rozkładu σ na cykle rozłączne).

3. Udowodnić, że

$$(\mathbb{Z}_2, +_2) \times (\mathbb{Z}_3, +_3) \cong (\mathbb{Z}_6, +_6).$$

Jak można uogólnić ten wynik?

4. Opisać orbity działania $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ na $\mathbb{R}^n$.

5. Niech $(A, +)$ będzie grupą przemienną. Udowodnić, że poniższy wzór

$$\forall a \in A \qquad 0 \cdot a = a, \quad 1 \cdot a = -a$$

zadaje działanie $\mathbb{Z}_2$ na A poprzez automorfizmy. Wskazać odpowiadający temu działaniu homomorfizm $\Psi : \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}(A)$. Kiedy Ψ jest monomorfizmem?

6. Udowodnić, że:

   (a) Dla każdego $k \in \mathbb{Z}_n$ funkcja

   $$\phi_k : (\mathbb{Z}_n, +_n) \to (\mathbb{Z}_n, +_n), \quad \phi_k(x) = k \cdot_n x$$

   jest endomorfizmem.

   (b) Jeśli $\phi : (\mathbb{Z}_n, +_n) \to (\mathbb{Z}_n, +_n)$ jest endomorfizmem, to istnieje $k \in \mathbb{Z}_n$ takie, że $\phi = \phi_k$.

   (c) Jeśli $k, l \in \mathbb{Z}_n$, to $\phi_k \circ \phi_l = \phi_{k \cdot_n l}$.

   (d) Jeśli $k \in \mathbb{Z}_n^*$, to $\phi_k \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n, +_n)$.

   (e) Funkcja

   $$\Phi : \mathbb{Z}_n^* \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n, +_n), \quad \Phi(k) = \phi_k$$

   jest izomorfizmem.

7. Załóżmy, że istnieje $g \in G$ taki, że $\text{rząd}(g) \neq 1, 2$. Udowodnić, że $\text{Aut}(G) \neq \{\text{id}_G\}$.

8. Wyznaczyć centrum S_3 i centrum D_4.

9. Dla $n \geqslant 3$, opisać klasę sprzężoności (123) w S_n.

10. Niech $H \leqslant G$. Udowodnić, że $|G/H| = |H \backslash G|$.

11. Udowodnić, że wszystkie automorfizmy S_3 są wewnętrzne.

12. Udowodnić, że rozkład permutacji na cykle rozłączne jest jednoznaczny z dokładnością do permutacji czynników rozkładu.