ALGEBRA 1B, Lista 5

Zadania 14. – 16. są przeznaczone na konwersatorium.
Niech G i H będą grupami i $n \in \mathbb{N}_{>1}$.

1. Niech $g \in G$ będzie rzędu n. Udowodnić, że dla każdego $m \in \mathbb{Z}$ mamy $g^m = e$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n|m$.
2. Niech $\varphi : G \to H$ będzie homomorfizmem. Udowodnić, że $\ker(\varphi) \leqslant G$ oraz $\mathrm{im}(\varphi) \leqslant H$.
3. Udowodnić, że jeśli $H \leqslant G$ oraz $[G : H] = 2$, to $H \trianglelefteq G$.
4. Udowodnić, że $T_n(\mathbb{R})$ nie jest dzielnikiem normalnym w $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.
5. Udowodnić, że $(\mathbb{R}^*, \cdot)/\{1, -1\} \cong (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$.
6. Udowodnić, że $(\mathbb{C}, +)/\mathbb{Z} \cong (\mathbb{C}^*, \cdot)$.
7. Udowodnić, że $(\mathbb{C}^*, \cdot)/\langle e^{\frac{2\pi i}{n}} \rangle \cong (\mathbb{C}^*, \cdot)$.
8. Podać przykład G i $N \trianglelefteq H \trianglelefteq G$, takich że $N \not\trianglelefteq G$.
9. Niech p będzie liczbą pierwszą i załóżmy, że $|G| = p^2$. Udowodnić, że $G \cong \mathbb{Z}_{p^2}$ lub $G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.
10. Niech $\varphi : \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ będzie działaniem z zad. 3 listy 4. Udowodnić, że $D_n \cong \mathbb{Z}_n \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_2$.
11. Udowodnić, że $A_4 \cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_3$.
12. Niech $|G| = 6$. Udowodnić, że $G \cong \mathbb{Z}_6$ lub $G \cong S_3$.
13. Udowodnić, że $\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \cong S_3$.
14. Niech G będzie podgrupą $S_\mathbb{R}$ składającą się z bijekcji *afinicznych*, tzn. postaci $x \mapsto ax + b$. Udowodnić, że $G \cong (\mathbb{R}, +) \rtimes (\mathbb{R}^*, \cdot)$.
15. Sformułować i udowodnić uogólnienie poprzedniego zadania z przypadku $\mathbb{R}$ do przypadku $\mathbb{R}^n$.
16. Udowodnić, że A_4 nie zawiera podgrupy rzędu 6.