ALGEBRA 1B, Lista 6

Niech $n, m \in \mathbb{N}_{>0}$ oraz G i H będą grupami. Zadanie 7. jest przeznaczone na konwersatorium.

1. Niech $H \leqslant G$. Udowodnić, że $H \trianglelefteqslant N(H) \leqslant G$, gdzie
$$N(H) := \{g \in G \mid gH = Hg\}.$$

2. Niech $\varphi : G \to \mathrm{Aut}(H)$ będzie działaniem. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:

   (a) Grupa $H \rtimes_\varphi G$ jest przemienna.

   (b) Grupy H i G są przemienne oraz działanie φ jest trywialne.

3. Niech $H_1 \trianglelefteqslant H, G_1 \trianglelefteqslant G$. Udowodnić, że $H_1 \times G_1 \trianglelefteqslant H \times G$ oraz
$$(H \times G)/(H_1 \times G_1) \cong (H/H_1) \times (G/G_1).$$

4. Udowodnić, że jeśli n i m są względnie pierwsze, to $\mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_m \cong \mathbb{Z}_{nm}$.

5. Załóżmy, że $|G| = pq$, gdzie p, q są pierwsze i $p < q$. Udowodnić, że:

   (a) $G \cong \mathbb{Z}_q \rtimes \mathbb{Z}_p$.

   (b) Jeśli p nie dzieli $q - 1$, to $G \cong \mathbb{Z}_{pq}$.

   (c) Jeśli p dzieli $q - 1$, to istnieje nieprzemienna grupa rzędu pq.

6. Niech $\Psi : G \to H$ będzie epimorfizmem. Załóżmy, że istnieje *cięcie* Ψ, tzn. homomorfizm $s : H \to G$ taki, że $\Psi \circ s = \mathrm{id}_H$. Udowodnić, że
$$G \cong \ker(\Psi) \rtimes H.$$

7. Opisać z dokładnością do izomorfizmu grupy rzędu mniejszego od 12.