ALGEBRA 1B, Lista 7

Niech $k \in \mathbb{N}_{>0}$, p będzie liczbą pierwszą oraz G i H będą grupami. Przyjmujemy, że G^0 (zerowa potęga kartezjańska grupy G) jest grupą trywialną.

1. Udowodnić, że
   (a) istnieje monomorfizm $D_4 \to S_4$;
   (b) nie istnieje monomorfizm $Q_8 \to S_4$.
2. Załóżmy, że H jest p-podgrupą G i że H jest dzielnikiem normalnym. Udowodnić, że H jest zawarta w każdej p-podgrupie Sylowa G.
3. Znaleźć wszystkie p-podgrupy Sylowa S_p. Wywnioskować, że
$$(p-1)! \equiv -1(\mod p).$$
4. Niech A będzie podgrupą $\mathbb{Z}$. Udowodnić, że $A = \{0\}$ lub $A \cong \mathbb{Z}$.
5. Znaleźć produkt grup cyklicznych, z którym izomorficzna jest grupa
$$\mathbb{Z}^3/\langle(10,11,8),(4,7,4),(4,4,4)\rangle.$$
6. Załóżmy, że mamy $a_1, b_1, \ldots, a_k, b_k \in \mathbb{N}$ takie, że
$$\mathbb{Z}_p^{a_1} \times \mathbb{Z}_{p^2}^{a_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p^k}^{a_k} \cong \mathbb{Z}_p^{b_1} \times \mathbb{Z}_{p^2}^{b_2} \times \ldots \times \mathbb{Z}_{p^k}^{b_k}.$$
   Udowodnić, że $a_1 = b_1, \ldots, a_k = b_k$.
7. Sprawdzić, czy następujące grupy są izomorficzne:
   (a) $\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_{36}$ i $\mathbb{Z}_{48} \times \mathbb{Z}_{18}$,
   (b) $\mathbb{Z}_{21} \times \mathbb{Z}_{40}$ i $\mathbb{Z}_{168} \times \mathbb{Z}_5$,
   (c) $\mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_3 \times \mathbb{Z}_5 \times \mathbb{Z}_7$ i $\mathbb{Z}_{315}$.
8. Załóżmy, że grupa G jest skończona i że każdy element G ma rząd mniejszy bądź równy 2. Udowodnić, że istnieje $l \in \mathbb{N}$ takie, że
$$G \cong (\mathbb{Z}_2)^l.$$