

ALGEBRA 1B, Lista 8

Niech $n \in \mathbb{N}_{>0}$ i G będzie grupą.

1. Niech H i T będą dzielnikami normalnymi w G . Udowodnić, że $[H, T]$ jest też dzielnikiem normalnym.
2. Udowodnić, że $Q'_8 = \{I, -I\}$.
3. Udowodnić, że:
 - (a) Dla $n \geq 3$ grupa A_n jest generowana przez zbiór wszystkich cykli długości 3.
 - (b) Dla $n \geq 1$ mamy $(S_n)' = A_n$.
 - (c) Dla $n \geq 5$ mamy $(A_n)' = A_n$.
4. Udowodnić, że jeśli $|G| = pq^2$, gdzie p i q są liczbami pierwszymi, to G jest rozwiązalna.
5. Udowodnić, że jeśli $|G| = 200$, to G jest rozwiązalna.
6. Udowodnić, że jeśli $|G| < 60$, to G jest rozwiązalna.
7. Znaleźć największą liczbę $n \in \mathbb{N}$, dla której umie Pan/i pokazać, że dla każdej nieparzystej $m < n$, jeśli $|G| = m$, to G jest rozwiązalna.
8. Ile elementów rzędu 7 zawiera grupa prosta rzędu 168?
9. Udowodnić, że $(\mathbb{Q}, +)$ nie ma ciągu:
 - (a) normalnego o faktorach cyklicznych,
 - (b) kompozycyjnego.
10. Znaleźć ciąg kompozycyjny grupy \mathbb{Z}_n .
11. Obejrzyć teledysk o pewnej grupie prostej (nie jest to Monstrum):
http://www.youtube.com/watch?v=UTby_e4-Rhg
12. Załóżmy, że B jest zbiorem wolnych generatorów G . Udowodnić, że $G = \langle B \rangle$.