

ALGEBRA 1B, Lista 1

Dla zbioru X , $\mathcal{P}(X)$ jest zbiorem wszystkich podzbiorów X i S_X jest zbiorem wszystkich bijekcji z X w X .

1. Podać przykład (tabelkę) działania \star na zbiorze $\{0, 1\}$ takiego, że

$$0\star(0\star 0) \neq (0\star 0)\star 0.$$

Ile istnieje takich działań?

2. Udowodnić, że działanie $+$ na zbiorze $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ (zdefiniowane na wykładzie) jest łączne i ma element neutralny, ale $(\mathbb{R} \cup \{\infty\}, +)$ nie jest grupą.
3. Udowodnić, że odejmowanie na \mathbb{Z} nie ma elementu neutralnego i że nie jest łączne.
4. Niech G będzie pewną grupą przekształceń X . Udowodnić, że $\text{id}_X \in G$.
5. Udowodnić, że jeśli X ma co najmniej 2 elementy, to (X, L) nie jest grupą, gdzie dla $a, b \in X$ mamy $a \text{L} b = a$.
6. Udowodnić, że jeśli X ma co najmniej 3 elementy, to grupa (S_X, \circ) nie jest przemienna.
7. Niech $*$ będzie działaniem na zbiorze X i $a, b, c \in X$. Udowodnić, że:
 - (a) Jeśli b i c są elementami neutralnymi $*$, to $b = c$.
 - (b) Jeśli $*$ jest łączne, ma element neutralny e , $a * b = e$ i $c * a = e$, to $b = c$.
 - (c) Jeśli $(X, *)$ jest grupą z elementem neutralnym e i $a * b = e$, to $b * a = e$.
8. Niech $f : X \rightarrow X$. Udowodnić, że:
 - (a) Funkcja f jest "na" wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $g : X \rightarrow X$ taka, że $f \circ g = \text{id}_X$.
 - (b) Funkcja f jest "1-1" wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje $g : X \rightarrow X$ taka, że $g \circ f = \text{id}_X$.
9. Udowodnić, że jeśli X jest niepusty, to:
 - (a) $(\mathcal{P}(X), \cup)$ nie jest grupą,
 - (b) $(\mathcal{P}(X), \cap)$ nie jest grupą.
10. Udowodnić, że jeśli w grupie $(G, *)$ z elementem neutralnym e dla każdego $g \in G$ mamy $g * g = e$, to G jest przemienna.