

ALGEBRA 1B, Lista 11

Niech R będzie pierścieniem przemiennym z 1 i $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

1. Niech $r_1, \dots, r_n \in R$. Udowodnić, że

$$(r_1, \dots, r_n) = r_1R + \dots + r_nR.$$

2. Niech $I \triangleleft R$ oraz

$$\sqrt{I} := \{a \in R : (\exists n \in \mathbb{N})(a^n \in I)\}.$$

Udowodnić, że $\sqrt{I} \triangleleft R$.

3. Niech $f : R \rightarrow S$ będzie homomorfizmem pierścieni przemiennych z 1, $I \triangleleft R, J \triangleleft S$. Udowodnić, że:

- $f^{-1}(J) \triangleleft R$.
- Jeśli f jest epimorfizmem, to $f(I) \triangleleft S$.
- Podać przykład f, I takich, że $f(I) \not\triangleleft S$.

4. Znaleźć $f \in \mathbb{Q}[X]$ taki, że $(f) = (X^2 - 1, X^3 + 1)$.
5. Udowodnić, że ideał $(2, X) \triangleleft \mathbb{Z}[X]$ nie jest główny.
6. Niech $\phi : R \rightarrow S$ będzie epimorfizmem pierścieni, gdzie R jest noetherowski. Udowodnić, że S jest też noetherowski.
7. Znaleźć podpierścień $R \subseteq \mathbb{Z}[X]$ taki, że R nie jest noetherowski.
8. Niech $d \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Z}$ i $d^2 \in \mathbb{Z}$. Rozważmy funkcję:

$$v : \mathbb{Q}[d] \rightarrow \mathbb{Q}, \quad v(n + md) = n^2 - m^2d^2.$$

Udowodnić, że:

- (a) dla każdych $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}[d]$ mamy $v(\alpha\beta) = v(\alpha)v(\beta)$.
- (b) $\alpha \in \mathbb{Z}[d]^*$ wtedy i tylko wtedy, gdy $v(\alpha) \in \{-1, 1\}$.

9. Udowodnić, że pierścień $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]$ jest euklidesowy.
10. Opisać grupę $\mathbb{Z}[\sqrt{-5}]^*$.
11. Udowodnić, że grupa $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^*$ jest nieskończona.