

ALGEBRA 1B, Lista 12

Niech R będzie pierścieniem przemiennym z 1 i K będzie ciałem.

1. Udowodnić, że 3 jest rozkładalny i że 5 jest nierozkładalny w $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.
2. Zbadać, czy dana liczba jest elementem rozkładalnym pierścienia R .
 - (a) $7 + \sqrt{-5}, 2 + 3\sqrt{-5}, 5 + 4\sqrt{-5}; R = \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$,
 - (b) $-1 + 7i, 5, 23, 1 + 6i; R = \mathbb{Z}[i]$.
3. Wyznaczyć z dokładnością do stowarzyszenia wszystkie elementy nierozkładalne w $K[[X]]$.
4. Udowodnić, że pierścień $K[X^2, X^3]$ nie jest UFD.
5. Niech R będzie UFD i $a, b \in R$. Udowodnić, że ideał $(a) \cap (b)$ jest główny.
6. Dla każdej liczby pierwszej p , utożsamiamy $\mathbb{Z}_{(p)}$ z podpierścieniem \mathbb{Q} . Udowodnić, że:

$$\bigcap_{p\text{-pierwsza}} \mathbb{Z}_{(p)} = \mathbb{Z}.$$

7. Niech $p > 2$ będzie liczbą pierwszą. Udowodnić, że następujące warunki są równoważne:
 - (a) p jest elementem rozkładalnym $\mathbb{Z}[i]$,
 - (b) p jest sumą dwóch kwadratów liczb całkowitych,
 - (c) p przystaje do 1 modulo 4.
8. Wykazać, że spośród liczb pierwszych jest nieskończenie wiele:
 - (a) elementów nierozkładalnych $\mathbb{Z}[i]$,
 - (b) elementów rozkładalnych $\mathbb{Z}[i]$.
9. Niech $f, g \in K[X]$ gdzie $f = \sum a_i X^i$. Definiujemy $f \circ g$ jako $\sum a_i g^i$. Udowodnić, że:
 - (a) Funkcja $\Psi_g : K[X] \rightarrow K[X]$, $\Psi_g(h) = h \circ g$ jest homomorfizmem.
 - (b) Zbiór wielomianów $\{f \in K[X] \mid \deg(f) = 1\}$ jest zamknięty na działanie \circ i wraz tym działaniem jest grupą, która jest izomorficzna z $K^* \times (K, +)$, gdzie K^* działa na $(K, +)$ poprzez mnożenie.
 - (c) Jeśli $\deg(g) = 1$, to f jest nierozkładalny wtedy i tylko wtedy, gdy $f \circ g$ jest nierozkładalny.