ALGEBRA 1B, Lista 2

Niech $n \in \mathbb{N}_{>0}$ i G, H, N będą grupami.

1. Niech $\mathbb{Z}_n^* := \{a \in \mathbb{Z}_n \mid a \text{ jest względnie pierwsza z } n\}$. Udowodnić, że:
   (a) Mnożenie modulo n jest łączne na $\mathbb{Z}_n$.
   (b) Mnożenie modulo n jest działaniem na $\mathbb{Z}_n^*$ i $(\mathbb{Z}_n^*, \cdot_n)$ jest grupą.
2. Napisać tabelkę D_3.
3. Napisać tabelkę grupy izometrii prostokąta nie będącego kwadratem.
4. Dla $k, l \in \mathbb{Z}$ i $g \in G$ udowodnić, że $(g^k)^l = g^{kl}$ oraz $g^{k+l} = g^k g^l$.
5. Niech $(A, +)$ będzie grupą przemienną i $m \in \mathbb{Z}$. Udowodnić, że funkcja
   $$f : A \to A, \quad f(a) := ma$$
   jest homomorfizmem.
6. Znaleźć izomorfizm pomiędzy D_3 i S_3.
7. Znaleźć monomorfizm $(\mathbb{R}, +) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
8. Znaleźć monomorfizm $\mathbb{Z}_n \to D_n$.
9. Niech G będzie grupą z zadania 3. Udowodnić, że G nie jest izomorficzna z grupą $(\mathbb{Z}_4, +_4)$.
10. Znaleźć monomorfizm $(\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot) \to \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$.
11. Udowodnić, że jeśli $f : G \to H$ jest homomorfizmem i $g \in G$, to dla każdego $m \in \mathbb{Z}$ mamy $f(g^m) = f(g)^m$.
12. Udowodnić, że
    (a) złożenie homomorfizmów jest homomorfizmem,
    (b) funkcja odwrotna do izomorfizmu jest izomorfizmem,
    (c) jeśli $G \cong H$ i $H \cong N$, to $G \cong N$.
13. Niech X będzie zbiorem równolicznym ze zbiorem Y. Znaleźć izomorfizm pomiędzy S_X i S_Y.
14. Niech $*$ będzie działaniem na zbiorze X i $f : X \to G$ bijekcją, taką że dla każdych $x, y \in X$ mamy $f(x * y) = f(x) \cdot f(y)$. Udowodnić, że $(X, *)$ jest grupą izomorficzną z G.