

ALGEBRA 1B, Lista 3

Niech G i H będą grupami i $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

1. Niech $f : G \rightarrow H$ będzie homomorfizmem, $G_1 \leq G$ i $H_1 \leq H$. Udowodnić, że $f(G_1) \leq H$ i $f^{-1}(H_1) \leq G$.
2. Udowodnić, że funkcja

$$f : G \rightarrow G, \quad f(g) = g^2$$

jest homomorfizmem wtedy i tylko wtedy, gdy G jest przemienna.

3. Niech $g \in G$. Przyjmijmy, że $\min \emptyset = \infty$. Udowodnić, że:

$$\text{rząd}(g) = \min\{k \in \mathbb{N}_{>0} \mid g^k = 1\}.$$

4. Udowodnić, że jeśli $f : G \rightarrow H$ jest monomorfizmem, to dla każdego $g \in G$ mamy

$$\text{rząd}(g) = \text{rząd}(f(g)).$$

5. Pokazać, że nie istnieje monomorfizm $(\mathbb{Z}_3, +_3) \rightarrow (\mathbb{R} \setminus \{0\}, \cdot)$.
6. Udowodnić, że $D_6 \not\cong A_4$.
7. Znaleźć monomorfizm $(\mathbb{Z}_n, +_n) \rightarrow (\mathbb{C} \setminus \{0\}, \cdot)$.
8. Znaleźć monomorfizm $f : S_n \rightarrow \text{GL}_n(\mathbb{Q})$.
9. Udowodnić, że $(\mathbb{Q}, +)$ nie jest skończenie generowana.
10. Udowodnić, że jeśli $\sigma, \tau \in S_n$ są rozłączne, to

$$\sigma \circ \tau = \tau \circ \sigma, \quad X_{\sigma \circ \tau} = X_\sigma \cup X_\tau.$$

11. Wykazać, że każda permutacja parzysta z S_n ($n \geq 3$) jest złożeniem pewnej liczby cykli długości 3 (niekoniecznie rozłącznych).
12. Udowodnić, że $S_n = \langle (12), (12 \dots n) \rangle$.