

ALGEBRA 1B, Lista 4

Niech G będzie grupą i $n \in \mathbb{N}_{>0}$.

1. Udowodnić, że

$$(\mathbb{Z}_2, +_2) \times (\mathbb{Z}_3, +_3) \cong (\mathbb{Z}_6, +_6).$$

Jak można uogólnić ten wynik?

2. Opisać orbity działania $GL_n(\mathbb{R})$ na \mathbb{R}^n .
3. Niech $(A, +)$ będzie grupą przemienną. Udowodnić, że poniższy wzór

$$\forall a \in A \quad 0 \cdot a = a, \quad 1 \cdot a = -a$$

zadaje działanie \mathbb{Z}_2 na A poprzez automorfizmy. Wskazać odpowiadający temu działaniu homomorfizm $\Psi : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Aut}(A)$. Kiedy Ψ jest monomorfizmem?

4. Udowodnić, że:

- (a) Dla każdego $k \in \mathbb{Z}_n$ funkcja

$$\phi_k : (\mathbb{Z}_n, +_n) \rightarrow (\mathbb{Z}_n, +_n), \quad \phi_k(x) = k \cdot_n x$$

jest endomorfizmem.

- (b) Jeśli $\phi : (\mathbb{Z}_n, +_n) \rightarrow (\mathbb{Z}_n, +_n)$ jest endomorfizmem, to istnieje $k \in \mathbb{Z}_n$ takie, że $\phi = \phi_k$.
- (c) Jeśli $k, l \in \mathbb{Z}_n$, to $\phi_k \circ \phi_l = \phi_{k \cdot_n l}$.
- (d) Jeśli $k \in \mathbb{Z}_n^*$, to $\phi_k \in \text{Aut}(\mathbb{Z}_n, +_n)$.
- (e) Funkcja

$$\Phi : \mathbb{Z}_n^* \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_n, +_n), \quad \Phi(k) = \phi_k$$

jest izomorfizmem.

5. Załóżmy, że istnieje $g \in G$ taki, że $\text{rzęd}(g) \neq 1, 2$. Udowodnić, że $\text{Aut}(G) \neq \{\text{id}_G\}$.
6. Wyznaczyć centrum S_3 i centrum D_4 .
7. Dla $n \geq 3$, opisać klasę sprzężoności (123) w S_n .
8. Niech $H \leq G$. Udowodnić, że $|G/H| = |H \backslash G|$.
9. Udowodnić, że wszystkie automorfizmy S_3 są wewnętrzne.
10. Udowodnić, że jeśli $H \leq G$ oraz $[G : H] = 2$, to $H \trianglelefteq G$.