

ALGEBRA 1B, Lista 5

Niech G i H będą grupami i $n \in \mathbb{N}_{>1}$.

1. Niech $g \in G$ będzie rzędu n . Udowodnić, że dla każdego $m \in \mathbb{Z}$ mamy $g^m = e$ wtedy i tylko wtedy, gdy $n|m$.
2. Niech $g \in G$ będzie jedynym elementem rzędu 2 w G . Udowodnić, że $g \in Z(G)$.
3. Udowodnić, że $T_n(\mathbb{R})$ nie jest dzielnikiem normalnym w $GL_n(\mathbb{R})$.
4. Udowodnić, że $(\mathbb{R}^*, \cdot) / \{1, -1\} \cong (\mathbb{R}_{>0}, \cdot)$.
5. Udowodnić, że $(\mathbb{C}, +) / \mathbb{Z} \cong (\mathbb{C}^*, \cdot)$.
6. Udowodnić, że $(\mathbb{C}^*, \cdot) / \langle e^{\frac{2\pi i}{n}} \rangle \cong (\mathbb{C}^*, \cdot)$.
7. Podać przykład G i $N \triangleleft H \triangleleft G$, takich że $N \not\triangleleft G$.
8. Niech p będzie liczbą pierwszą i założmy, że $|G| = p^2$. Udowodnić, że $G \cong \mathbb{Z}_{p^2}$ lub $G \cong \mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p$.
9. Niech $\varphi : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{Z}_n)$ będzie działaniem z zad. 3 listy 4. Udowodnić, że $D_n \cong \mathbb{Z}_n \rtimes_{\varphi} \mathbb{Z}_2$.
10. Udowodnić, że $A_4 \cong (\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \rtimes \mathbb{Z}_3$.
11. Udowodnić, że $\text{Aut}(\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2) \cong S_3$.
12. Niech G będzie podgrupą $S_{\mathbb{R}}$ składającą się z bijekcji *afinicznych*, tzn. postaci $x \mapsto ax + b$. Udowodnić, że $G \cong (\mathbb{R}, +) \rtimes (\mathbb{R}^*, \cdot)$.
13. Udowodnić, że A_4 nie zawiera podgrupy rzędu 6.